Université de Rennes 1 — Année 2012–2013

Module PS1 (Probabilités et Statistiques 1)

Feuille d'exercices 6

Exercice 1 Le nombre de minutes qu'un joueur de base-ball particulier se trouve sur le terrain suit la densité suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 10 \\ 0,025 & \text{si } 10 \leqslant x < 20 \\ 0,05 & \text{si } 20 \leqslant x < 30 \\ 0,025 & \text{si } 30 \leqslant x < 40 \\ 0 & \text{si } x > 40 \end{cases}$$

Trouver la probabilité que ce joueur soit actif :

(a) plus de 15 minutes. Rép : $1 - 5 \cdot 0,025 = 1 - 0,125 = 0,875 = 87,5\%$

(b) entre 20 et 35 minutes. Rép : $10 \cdot 0,05 + 5 \cdot 0,025 = 0,625 = 62,5\%$

(c) moins de 30 minutes. Rép : $1 - 10 \cdot 0,025 = 0,75 = 75\%$.

Exercice 2 Une variable aléatoire X a une densité

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot x^4 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Trouver c, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$, et la médiane. Rép : Il faut choisir c telle que que $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 c \cdot x^4\,dx = \left[\frac{c}{5}x^5\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{c}{5}$. Donc $c = 5$. $\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x \cdot 5x^4\,dx = 5 \cdot \int_0^1 x^5 = 5\left[\frac{1}{6}x^6\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{5}{6} = 0,8333$. $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \int_0^1 x^2 \cdot 5x^4\,dx - \frac{25}{36} = 5 \cdot \left[\frac{1}{7}x^7\right]_{x=0}^{x=1} - \frac{25}{36} = \frac{5}{7} - \frac{25}{36} = 0,0198...$ Pour la médiane : on cherche m tel que $\frac{1}{2} = \int_0^m 5x^4 = m^5$, donc $m = \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \approx 0,87$

Exercice 3 Un nombre est choisi au hasard, selon la loi uniforme, sur le segment $[0, 1]$. Trouver la probabilité que le rapport entre le plus petit et le plus grand segment soit inférieur à $\frac{1}{4}$. Rép : $P([0, \frac{1}{5}] \cup [\frac{4}{5}, 1]) = \frac{2}{5}$.

Exercice 4 Soit N un entier. On choisit indépendamment N nombres réels sur l'intervalle $[0, N]$ selon la loi uniforme $\mathcal{U}(0, N)$. On note X_N le plus petit des nombres obtenus. On va étudier la variable aléatoire X_N :

(a) Pour tout $t \in [0, N]$, calculer $P(X_N > t)$. Rép : la proba que tous les nombres soient supérieurs à t est $(\frac{N-t}{N})^N$

(b) En déduire la fonction de répartition F_{X_N} de X_N. Rép : $F_{X_N} = P(X_N \leqslant t) = 1 - (\frac{N-t}{N})^N$

(c) Pour $t > 0$ fixé, calculer $\lim_{N\to\infty} F_{X_N}(t)$. Indication : vous pouvez admettre la formule (normalement vue en Lycée) : $\lim_{N\to\infty}(1+\frac{x}{N})^N = e^x$. Rép : $= \lim_{N\to\infty} 1 - (\frac{N-t}{N})^N = 1 - \lim(1-\frac{t}{N})^N = 1 - e^{-t}$

(d) Donner un sens exact à la phrase "Pour N très grand, X_N est distribué selon une loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$". La fonction de répartition de X_N tend, en tout point, vers la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(1)$: $F_{X_N}(t) \stackrel{N\to\infty}{\longrightarrow} F_{\mathcal{E}(1)}(t)$. Cela s'appelle une convergence en loi.

Exercice 5 La durée de vie (en minutes) d'une particule élémentaire radioactive peut être modélisée par une variable aléatoire exponentielle, de densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100}e^{-x/100} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(a) Quelle est la médiane de la durée de vie ? Rép : $1 - e^{\frac{-x}{100}} = 0,5 \Longrightarrow y = -(\ln(-\frac{1}{2}) \cdot 100 \simeq 69,3$ minutes.

(b) Quelle est la demi-vie ? Réponse : par définition, Demi-vie=médiane de la durée de vie.

Exercice 6 (a) Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. Rappellons que nous notons $\Phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ la fonction de répartition de cette loi. Sachant que $\Phi(-1) = 0,15866\ldots$, $\Phi(0) = 0,5$ et $\Phi(1) = 0,84134$, déterminer la probabilité

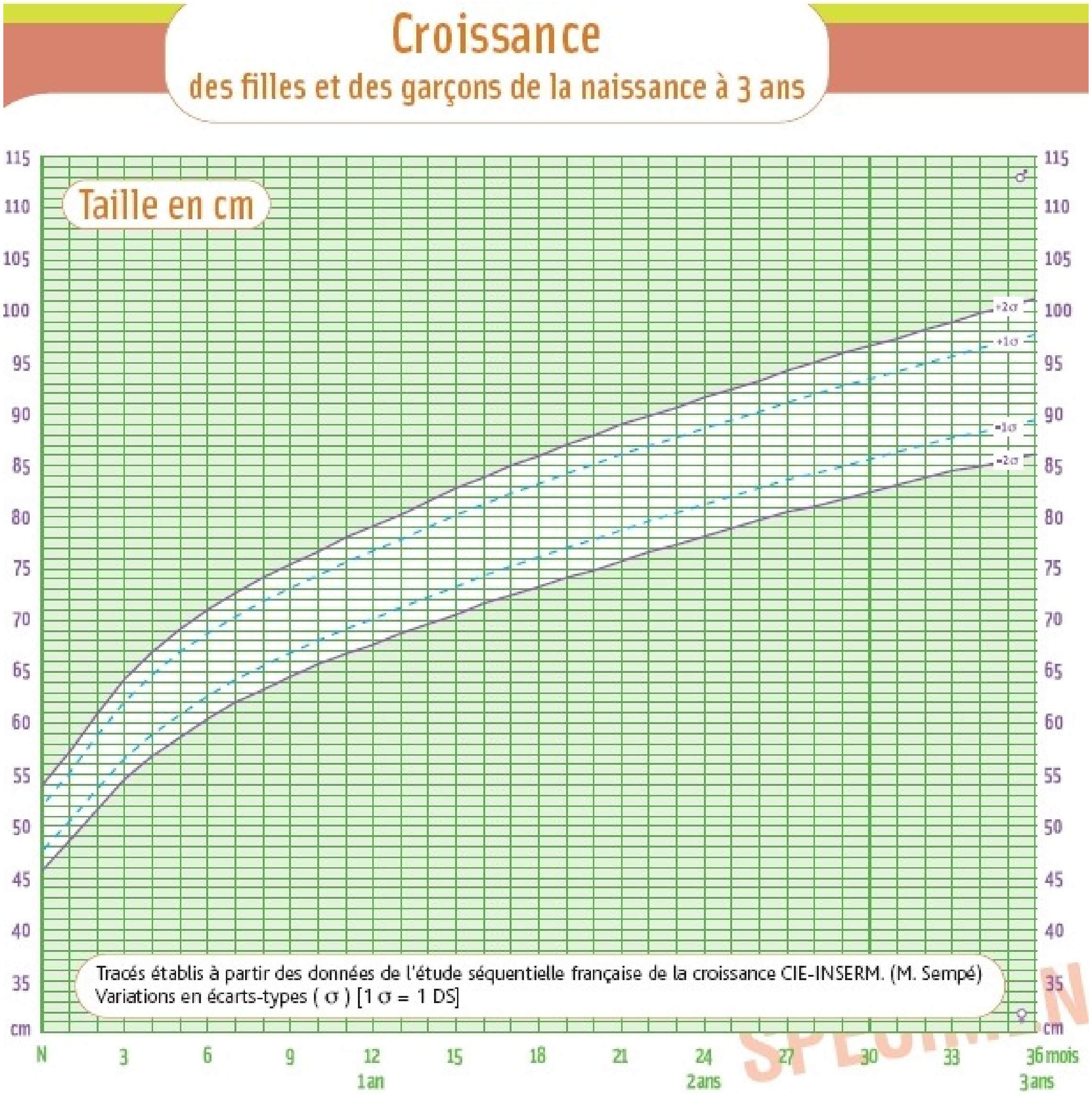
$$P(X \in [\mathbb{E}(X) - \sigma, \mathbb{E}(X) + \sigma])$$

Rép : $= \Phi(\mathbb{E}(X)+\sigma) - \Phi(\mathbb{E}(X)-\sigma) = \Phi(0+1) - \Phi(0-1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0,68268 = 68,268\%$

(b) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, pour $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$ arbitraires. Déterminer la probabilité

$$P(X \in [\mathbb{E}(X) - \sigma, \mathbb{E}(X) + \sigma])$$

Même réponse, $68,268\%$! Démonstration : $P(X \in [\mathbb{E}(X) - \sigma, \mathbb{E}(X) + \sigma]) = P(X^* \in [\frac{(\mathbb{E}(X)-\sigma)-\mathbb{E}(X))}{\sigma}, \frac{(\mathbb{E}(X)+\sigma)-\mathbb{E}(X))}{\sigma}]) = P(X^* \in [-1,1]) = 68,268\%$, car $X^* = \frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma}$ est de loi $\mathcal{N}(0,1)$. C'est d'ailleurs un fait bien-connu : dans une distribution normale, à peu près 68% des résultats sont à une distance d'au plus σ (1 écart type) de la moyenne, et 95% sont à une distance d'au plus 2σ. Exemple : courbe de croissance dans carnet de santé de bébés :


Croissance
des filles et des garçons de la naissance à 3 ans
Taille en cm
115
110
105
100
95
90
85
80
75
70
65
60
55
50
45
40
35
cm
+2σ
+1σ
-1σ
-2σ
♂
♀
Tracés établis à partir des données de l'étude séquentielle française de la croissance CIE-INSERM. (M. Sempé)
Variations en écarts-types (σ) [1 σ = 1 DS]
N
3
6
9
12
1 an
15
18
21
24
2 ans
27
30
33
36 mois
3 ans