Université de Rennes 1 Année 2012–2013
Module PS1 (Probabilités et Statistiques 1)

Feuille d'exercices 5

Exercice 1 On lance deux dés honnêtes. On note X le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi de X. Calculer son espérance et sa variance. Rép : $P_X(k) = \frac{2k-1}{36}$. $\mathbb{E}(X) = \frac{1\cdot1+2\cdot3+3\cdot5+4\cdot7+5\cdot9+6\cdot11}{36} = \frac{161}{36} \simeq 4,472$. $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{1\cdot1+4\cdot3+9\cdot5+16\cdot7+25\cdot9+36\cdot11}{36} - \frac{161^2}{36^2} = \frac{791}{36} - \frac{161^2}{36^2} = \frac{2555}{1296} \simeq 1,97$

Exercice 2 Soit X une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre p – donc $P(X = k) = p \cdot (1-p)^{k-1}$ pour $k = 1, 2, 3, \dots$ Démontrer que X est une "variable aléatoire sans mémoire" :

$$P(X > k) = P(X > K + k \mid X > K)$$

Indication : montrer d'abord que $P(X > k) = (1-p)^k$. Rép : Pour montrer que $P(X > k) = (1-p)^k$, il y a deux possibilités. Soit $\sum_{i=k+1}^{\infty} p \cdot (1-p)^{i-1} = (1-p)^k \cdot \sum_{i=0}^{\infty} p \cdot (1-p)^i = (1-p)^k \cdot \frac{p}{p} = (1-p)^k$. Ou bien on utilise le modèle du cours : l'événement $X > k$ veut dire que les k premiers essais sont des échecs, et cet événement est de probabilité $(1-p)^k$. Ensuite, la démonstration de la formule "sans mémoire" est très simple.

Exercice 3 On lance une pièce de monnaie un certain nombre de fois jusqu'à obtenir "pile". On s'arrête la première fois où on obtient "pile". On touche alors une somme d'argent égale à 2 puissance le nombre de fois où on a obtenu "face". On note X cette somme. Quelle est l'espérance de X ? Rép : $\mathbb{E} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$ est une série divergente. Cette variable aléatoire n'a pas d'espérance ! On pourrait dire que le jeu est infiniment intéressant pour le joueur.

Exercice 4 Soit X une variable aléatoire discrète. Que peut-on dire si la variance de X est 0 ? $0 = \mathbb{V}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}(X))^2 \cdot P(X = x)$. Comme tous les termes de cette somme sont positifs ou nuls, ils doivent tous être nuls. On en déduit que si $x \neq \mathbb{E}(X)$, alors $P(X = x) = 0$; donc X prend presque toujours la valeur $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 5 Soit X une variable aléatoire. On appelle variable aleatoire centrée réduite associée à X, la variable aléatoire X^* définie par :

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}.$$

Trouver $\mathbb{E}(X^*)$ et $\mathbb{V}(X^*)$. Rép : $\mathbb{E}(X^*) = 0$ et $\mathbb{V}(X^*) = 1$.

$\boxed{\textbf{Exercice 6}}$ Soir X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}(X) = 1$ et $\mathbb{V}(X) = 5$. Calculer $\mathbb{E}((2+X)^2)$ et $\mathbb{V}(4+3X)$. Rép : $\mathbb{E}((2+X)^2) = \mathbb{E}(4) + \mathbb{E}(4X) + \mathbb{E}(X^2) = 4 + 4 \cdot \mathbb{E}(X) + (\mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2) = 4 + 4 + 5 + 1^2 = 14$.

$\boxed{\textbf{Exercice 7}}$ On tire au hasard 5 cartes d'un jeu de 32 cartes avec remise. Soit X, la variable aléatoire égale au nombre de rois obtenus. Donner la loi de X, son espérance, sa variance, et son écart-type. Rép : c'est une loi binomiale $\mathcal{B}(5, \frac{1}{8})$. Son espérance est $\frac{5}{8}$ sa variance $\frac{35}{64}$ et son écart-type $\sqrt{35/64}$.

$\boxed{\textbf{Exercice 8}}$ Toujours avec un jeu de 32 cartes, on effectue une série infinie de tirages successifs, en remettant chaque fois la carte tirée.

(a) Soit Y, le rang d'apparition du premier roi. Donner la loi de Y, son espérance et sa variance. Rép : c'est une loi géométrique $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{8})$. L'espérance est 8, la variance est $7 \cdot 8 = 56$.

(b) Soit Z, le nombre de cartes autres qu'un roi qu'il aura fallu tirer pour obtenir le premier loi. Donner, sans calcul, la loi de Z, son espérance et sa variance. Rép : $Z = Y - 1$, donc $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(Y) - 1 = 7$ et $\mathbb{V}(Z) = \mathbb{V}(Y) = 56$.

$\boxed{\textbf{Exercice 9}}$ Soit X une variable aléatoire de Poisson avec paramètre λ. Pour une valeur $k \in \mathbb{N}$ donnée, quelle est la valeur de λ qui maximise $P(X = k)$? Rép : on cherche le maximum de la fonction $f(\lambda) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$. Or, $f'(\lambda) = \left(k \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{k!} - \frac{\lambda^k}{k!}\right) e^{-\lambda}$, ce qui s'annule ssi $\lambda = k$.

$\boxed{\textbf{Exercice 10}}$ Pour une variable aléatoire X binomiale d'espérance 6 et de variance 2,4 trouver $P(X = 5)$. Rép : Déterminons d'abord la loi de X. $6 = \mathbb{E}(X) = n \cdot p$ et $2{,}4 = \mathbb{V}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$, donc $2{,}4 = 6(1-p)$, donc $p = 0{,}6$, et $n = \frac{6}{p} = 10$. Pour résumer, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(10, 0{,}6)$, et en particulier $P(X = 5) = C_{10}^5 \cdot 0{,}6^5 \cdot 0{,}4^5$.

$\boxed{\textbf{Exercice 11}}$ Admettons que le nombre d'erreurs par page dans un livre suive la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0{,}5$. Calculer la probabilité que, sur une page donnée, il y a au moins 3 erreurs. Rép : proba$= 1 - P(0 \text{ erreurs}) - P(1 \text{ erreur}) - P(2 \text{ erreurs}) = 1 - e^{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{1} + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{2^2 \cdot 2}) = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \frac{13}{8} \simeq 1 - 0{,}9856 = 0{,}0144$.

$\boxed{\textbf{Exercice 12}}$ Une urne contient des jetons numérotés de 1 à n. On les tire un à un sans remise jusqu'à obtenir le plus petit. On note X le nombre de tirages ainsi effectués. Déterminer la loi de X, $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$ et $F_X(x)$. Rép : c'est une loi uniforme !

$\boxed{\textbf{Exercice 13}}$ Une urne contient 2^n papiers sur lesquels sont reproduits les 2^n parties d'un ensemble E à n éléments. On tire un papier au hasard. Soit X, la variable aléatoire égale au cardinal de la partie tirée. Déterminer la loi de X, et donner sans calcul les valeurs de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$. Rép : la probabilité que la partie tirée soit de cardinal k est $\frac{C_n^k}{2^k} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ avec $p = \frac{1}{2}$. Donc, c'est une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$, donc $\mathbb{E}(X) = \frac{n}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{n}{4}$.

Exercice 14 On joue au pile ou face avec une pièce avec $P(\text{pile}) = p$, et $P(\text{face}) = 1-p$. On effectue des lancers successifs. Soit X, la variable aléatoire égale au rang de la 2^{eme} apparition de pile. Trouver la loi de X. Trouver l'espérance (difficile) et la variance (encore plus difficile) de X. Rép : pour calculer $P(X = k)$, remarquons que pour avoir le deuxième pile au $k$ème tour, on doit obtenir, parmi les k premiers lancers, exactement deux pile et $k-2$ face. Pour l'apparition du premier pile il y a $k-1$ choix, mais le deuxième pile doit être au $k$ème lancer. Donc $P(X = k) = (k-1) \cdot (1-p)^{k-2} \cdot p^2$. Notons $q = 1-p$. Alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot q^{k-2} \cdot p^2 = p^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{d}{dq})^2 q^k = p^2 \cdot (\frac{d}{dq})^2 \sum_{k=0}^{\infty} q^k = p^2 \cdot (\frac{d}{dq})^2 \frac{1}{1-q} = p^2 \cdot \frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2}{p}$. Par un calcul semblable, mais plus long, on obtient pour la variance $\mathbb{V}(X) = \frac{2}{p^2} - \frac{2}{p}$.