Université de Rennes 1 Année 2012–2013
Module PS1 (Probabilités et Statistiques 1)

Feuille d'exercices 3

Exercice 1 (Démonstration que la probabilité conditionnelle est bien une probabilité) Soit P une probabilité sur un univers Ω, et soit $B \subset \Omega$ un événement avec $P(B) > 0$. Montrer que la fonction qui à l'événement A associe le nombre $P(A|B)$ est une probabilité sur Ω. Rép : il faut montrer que $P(\Omega|B) = 1$ et que $P(.|B)$ est additif pour des événements disjoints $A_1, A_2, A_3, \ldots$ (peut-être une infinité).

Exercice 2 Pour une famille avec exactement deux enfants, calculer les probabilités suivantes.

(a) Sachant qu'il y a au moins une fille, quelle est la probabilité que l'autre enfant est aussi une fille ? Rép : $\frac{1}{3}$. Utiliser une proba conditionnelle avec événements A =au moins une fille et B =deux filles.

(b) Sachant que l'ainée est une fille, quelle est la probabilité que l'autre enfant est aussi une fille ? Rép : $\frac{1}{2}$. Utiliser une proba conditionnelle avec événements A =premier enfant une fille et B =deuxième enfant une fille. On trouve que A et B sont indépendants.

Exercice 3 (Indépendance multiple) Commençons avec une définition : trois événements A, B, C sont dits *deux à deux indépendants* si

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad \text{et} \quad P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) \quad \text{et} \quad P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C).$$

Ils sont dits *mutuellement indépendants* si

$$\text{ils sont deux à deux indépendants et en plus } P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Soit, par exemple $\Omega = \{\text{familles avec deux enfants}\}$. Considérons les trois événéments $A =$"la fratrie est mixte", $B =$"l'enfant ainé est une fille", $C =$"le cadet est un garçon".

(a) Montrer que ces trois événements sont deux à deux indépendants.

Rép : $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$. $P(A \cap B) = P((F, G)) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B)$ etc

(b) Montrer que ces trois événements ne sont pas mutuellement indépendants.

Rép : $P(A \cap B \cap C) = P((F, G)) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \neq P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

Exercice 4 Dans une population on trouve une proportion de $\frac{1}{10000}$ individus qui portent un certain virus. Il y a un test pour la présence de ce virus. Ce test n'est pas parfait : si un individu porte le virus, alors le test le détecte avec une probabilité de 0,99. Si un individu ne porte pas le virus, le test donne un résultat positif (érroné) avec probabilité de 0,001.

(a) Si on tire un individu au hasard de la population, on lui fait passer le test, et le résultat est positif, quelle est la probabilité qu'il porte vraiment le virus ? Rép : Soit $V =$"l'individu porte le virus" et $T =$"le test donne un résultat positif". Alors $P(V|T) = \frac{P(T|V)\cdot P(V)}{P(T|V)\cdot P(V)+P(T|V^c)\cdot P(V^c)} = \frac{0{,}99\cdot\frac{1}{10000}}{0{,}99\cdot\frac{1}{10000}+0{,}001\cdot 0{,}9999} \simeq 0,09$

(b) À première vue, le résultat obtenu en (a) est extêmement surprenant ! Expliquez-le en quelques phrases françaises. Rép : Malgré un test très performant, un individu testé positif n'a que 9% de chances de porter vraiment le virus. C'est expliqué par le fait que le virus est tellement rare, que les fausses alertes sont plus nombreux que des vrais tests positifs.

Exercice 5 (Le jeu des trois portes) Le jeu des trois portes était un jeu télévisé populaire (Let's make a deal) diffusé dans les années 1970 aux États-Unis. Le joueur est placé devant 3 portes fermées. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture que le joueur peut gagner. Derrière les deux autres se trouve une chèvre. Le présentateur connait la position de la voiture. Le joueur doit d'abord désigner une porte. Puis le présentateur ouvre une porte qui est ni celle choisie par le candidat, ni celle qui cache la voiture. Le candidat a alors le droit ou bien d'ouvrir la porte initialement choisie, ou bien de changer son choix vers la troisième porte.

(a) Quelles sont ses chances de gagner la voiture s'il garde son choix initial ? Rép : $\frac{1}{3}$

(b) Quelles sont ses chances de gagner la voiture s'il choisit la troisième porte ? Rép : $\frac{2}{3}$. En fait, pour l'expliquer il faut mieux pas utiliser les probabilités conditionnelles, mais juste dire avec cette stratégie il gagne ssi son premier choix était mauvais.

Exercice 6 (Difficile)

Dans une voiture de TGV toutes les places sont vendues. La première personne qui arrive est un peu tête-en-l'air, et se met aléatoirement à une place (mais dans la bonne voiture). Chaque personne suivante qui arrive applique la règle suivante : si sa place est encore libre, elle se met sur sa place prévue, si sa place est déjà prise, elle se met aléatoirement sur une des places encore libres. Quelle est la probabilité que la dernière personne qui arrive pourra se mettre sur sa place prévue ? (Indication : cette question peut se faire sans aucun calcul et sans mentionner les probabilités conditionnelles. Or, pour avoir une idée, vous pouvez calculer les cas où une voiture de TGV n'a que 2, 3, ou 4 sièges.) Rép : $\frac{1}{2}$. Les calculs pour $n = 2, 3, 4$ sont relativement faciles à faire et permettent de vous mettre sur la bonne piste. Voici un argument général : au moment où la $k$ème personne s'est installé, tous les sièges originalement attitrés aux personnes $2, 3, ..., k$ sont prises ! En particulier, quand l'avant-dernière personne s'est installé, il n'y a plus qu'un siège qui reste libre, et ce siège est soit celui de la première personne, soit celui prévu pour la dernière personne. Or, tout au long du processus précédent, le premier et le dernier siège jouaient des rôles absolument symétriques, donc la probabilité que ce soit le siège prévu pour le dernier passager qui reste libre à son arrivée est de $\frac{1}{2}$.