Université de Rennes 1 Année 2012–2013
Module PS1 (Probabilités et Statistiques 1)

Feuille d'exercices 2

Exercice 1 (Coefficients binomiaux)

(a) Si $0 \leqslant k \leqslant n$, alors $C_n^k = C_n^{n-k}$ Dém : de deux façons : argument combinatoire ou en utilisant la formule

(b) Si $1 \leqslant k \leqslant n$, alors $k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-1}$

(c) Si $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$ (formule du binôme de Newton) Dém : par récurrence. Normalement, ça a déjà été fait dans le cours AN1.

(d) Si $n \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$ Dém : utiliser la formule binomiale avec $a = b = 1$

(e) Si $n \in \mathbb{N}$, alors $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$. (Par exemple : $C_4^0 - C_4^1 + C_4^2 - C_4^3 + C_4^4 = 0$) Dém : utiliser la formule binomiale avec $a = 1$, $b = -1$.

Exercice 2 Il y a 4 types de gâteaux dans une patisserie. De combien de façons peut-on acheter 7 gâteaux ? Rép : ça se calcule à la main ! $\Gamma_4^7 = C_{7+4-1}^7 = C_{10}^7 = C_{10}^3 = 120$

Exercice 3 De combien de manières peut-on mettre 8 personnes autour d'une table ronde avec 8 places

(a) si aucune restriction est mise. Rép : $8!$

(b) s'il y a une famille de 3 qui doit être assis ensemble. Rép : Il y a 8 possibilités pour la position de la famille, les 3 membres de la famille peuvent être assis de $3! = 6$ ordres pour les membres de la famille, et $5! = 120$ ordres pour les autres invités. En total, $8 \cdot 6 \cdot 120 = 5760$ possibilités.

(c) Si on place les 8 invités aléatoirement, quelle est la probabilité que la famille est assise ensemble par pure chance ? Rép : $\frac{5760}{8!} \simeq 14,2\%$

Exercice 4 On considère un jeu avec 32 cartes.

(a) Combien y a-t-il de donnes de 4 cartes ? Rép : $C_{32}^4 = 35960$

(b) Combien y a-t-il de donnes de 4 cartes contenant exactement deux rois ? Rép : Pour le choix des deux rois parmi les quatre il y a $C_4^2 = 6$ possibilités. Pour le choix des deux autres cartes parmi les 28 non-rois, il y a $C_{28}^2 = 14 \cdot 27 = 378$ possibilités. En total $6 \cdot 378 = 2268$ possibilités.

(c) Quelle est la probabilité qu'une donne de 4 cartes contienne exactement deux rois ? Rép : toutes les combinaisons ont la même probabilité. La probabilité cherchée est donc $\frac{2268}{35960} \simeq 0,063 = 6,3\%$.

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ Une urne contient 2 boules rouges et 5 noires. Les joueurs A et B tirent à tour de rôle une boule, sans remise, jusqu'à ce que une boule rouge sorte (A commence). Quelle est la probabilité que ce soit A qui tire la première boule rouge ? Rép : Les jeux possibles sont : R, NR, NNR, NNNR, NNNNR, NNNNNR, avec les probabilités : $P(R) = \frac{2}{7}, P(NR) = \frac{5 \cdot 2}{7 \cdot 6}$, $P(NNR) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 2}{7 \cdot 6 \cdot 5}$, $P(NNNR) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}$, $P(NNNNR) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}$, $P(NNNNNR) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$. A gagne dans le premier, troisième et cinquième cas, donc la proba que A gagne est de $\frac{2}{7} + \frac{4}{21} + \frac{2}{21} = \frac{12}{21} \simeq 57\%$.

$\boxed{\textbf{Exercice 6}}$ Dans une lotérie, le joueur doit choisir 8 nombres entre 1 et 40. Le tirage sélectionne 8 nombres parmi les 40. En admettant que le tirage est équiprobable pour les C_{40}^8 combinaisons, quelle est la probabilité que le joueur ait

(a) les 8 bons nombres ? Rép : Une seule bonne combinaison, donc $1/C_{40}^8 = \frac{1}{76904685}$

(b) 7 parmi les 8 bons nombres ? Rép : Combien de bonnes combinaisons ? On peut avoir un des 8 nombres incorrects, et celui-ci peut prendre $40 - 8 = 32$ valeurs différents, donc $\frac{8 \cdot 32}{76904685} \simeq 0,00033\%$

(c) aucun bon nombre ? Rép : $C_{32}^8 = 10518300$ combinaisons, donc probabilité $\frac{10518300}{76904685} \simeq 13,7\%$