Université de Rennes 1 — Année 2012–2013

Module PS1 (Probabilités et Statistiques 1)

Examen de rattrapage
Mardi 18 juin 2013, 8h – 10h

Documents, notes de cours ou de TD, calculatrices et téléphones portables sont interdites.
Justifiez toutes vos réponses (sauf mention contraire).
Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (Pas de justifications exigées pour cet exercice) **8 points**

(a) Soit Ω un ensemble fini. Donnez la définition d'une *probabilité* sur Ω. C'est une fonction P qui à chaque sous-ensemble A de Ω associe un nombre $P(A)$, telle que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si A et B sont disjoints, et telle que $P(\Omega) = 1$

(b) Soit X une variable aléatoire sur l'ensemble Ω. Dire que X suit une loi uniforme sur l'ensemble $\{1, \dots, 5\}$ signifie que ... (Donnez la définition) $P(X = 1) = \dots = P(X = 7) = \frac{1}{5}$

(c) Soit $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire avec $\mathbb{E}(X) = 2$ et $\mathbb{V}(X) = 3$. Quelle est l'espérance et la variance de la variable aléatoire $4X - 1$? $\mathbb{E}(X) = 4 \cdot 2 - 1 = 7$, $\mathbb{V}(X) = 48$

(d) Supposons que Y est une variable aléatoire avec $P(Y = 0) = \frac{1}{4}$ et $P(Y = 2) = \frac{3}{4}$. Dessiner le graphe de la fonction de répartition de la loi de Y.

(e) Je jette un dé 10 fois et je compte le nombre de 6 obtenus. Quelle est la probabilité qu'il y en ait exactement k ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, 10$) ? Quel est le nom de la loi décrivant le nombre de "6" obtenus ? Et quelle est l'espérance de cette loi ? $C_{10}^{k}(\frac{1}{6})^k(\frac{5}{6})^{n-k}$. C'est une loi binomiale, $\mathcal{B}(10, \frac{1}{6})$, qui est d'espérance $\frac{10}{6}$.

(f) Énoncez la loi (faible) des grands nombres. On va donner des points partiels pour tout énoncé qui va dans le bon sens : si $X_1, \dots, X_n$ sont tirés selon une même loi, alors si n était assez grand, leur moyenne est probablement proche de l'espérance de la loi.

(g) Donner la densité de la loi exponentielle de paramètre 4. $f(x) = 4e^{-4x}1_{[0,+\infty[}$

Exercice 2 **1 point** Une pièce d'argent juste (non-pipée) est jeté deux fois. Considérons les événements M = deux fois le même résultat (PP ou FF), et F = au moins un jet donne Face (FP, PF ou FF). Les événements M et F sont-ils indépendants ? Non, car $P(M) \cdot P(D) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ et $P(M \cap D) = P((FF)) = \frac{1}{4}$.

Exercice 3 **1 point** Un groupe de 15 personnes doivent choisir 3 personnes parmi elles pour les représenter. Combien de combinaisons (sélections différentes, sans faire attention à l'ordre), y a-t-il ? Si les 15 personnes sont 6 allemands, 5 belges et 4 français, combien des combinaisons contiennent exactement 1 personne de chaque nationalité ? $C_{15}^3 = 455$ combinaisons. Il y a $C_6^1 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ sélections avec 1 personne de chaque nationalité.

Exercice 4 On considère une pièce dont les deux côtés sont marqués "0" et "1". On jette cette pièce deux fois – on a donc un univers $\Omega = \{(0,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (1,1)\}$, dont chaque élément apparaît avec probabilité $\frac{1}{4}$. Considérons les deux variables aléatoires

$$X((i,j)) = \max(i,j) \quad \text{et} \quad Y(i,j) = i - j$$

1 point (a) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$. $\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$ et $\mathbb{E}(Y) = 0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0 = 0$

2 points (b) Calculer la covariance $Cov(X,Y)$. $Cov(X,Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) \overset{*}{=} P(0,1) \cdot X(0,1) \cdot Y(0,1) + P(1,0) \cdot X(1,0) \cdot Y(1,0) - 0 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$ où l'égalité $\overset{*}{=}$ vient du fait que $Y(i,j) = 0$ sauf si $(i,j) = (0,1)$ ou $(1,0)$.

1 point (c) Les deux variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Non, car $P\left((X=0) \cap (Y=0)\right) = P(0,0) \neq P(X=0) \cdot P(Y=0) = \frac{1}{2}P(0,0)$.

Exercice 5 J'ai deux pièces d'argent, A et B qui se ressemblent parfaitement. Or, pour la pièce A, la probabilité d'obtenir "Face" est de $\frac{1}{4}$, tandis que pour la pièce B, la probabilité de "Face" est de 1. On choisit une des deux pièces au hasard, et on la jette deux fois. Le résultat des deux jets est "Face".

2 points (a) Montrer que le probabilité que la pièce choisie était la pièce B est de $\frac{16}{17}$. Indication : on pourra utiliser la formule de Bayes. Notons les événements B =pièce B (donc B^c =pièce A), et F =deux jets "Face". Alors

$$P(B|F) = \frac{P(F|B) \cdot P(B)}{P(F|B) \cdot P(B) + P(F|B^c) \cdot P(B^c)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{16}{17}$$

1 point (b) (difficile) Quelle est la probabilité qu'un troisième jet avec la même pièce donne encore "Face" sachant que les deux premiers ont donné "Face" ? Notons T l'événement "le troisième jet donne Face". Alors

$$P(T|F) = P(T|B) \cdot P(B|F) + P(T|B^c) \cdot P(B^c|F) = 1 \cdot \frac{16}{17} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{17} = \frac{65}{68}$$

2 points **Exercice 6** Calculer l'espérance et la médiane de la loi de densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \in [1, e] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si X est une v.a. suivant cette loi, alors $\mathbb{E}(X) = \int_1^e x \cdot \frac{1}{x}\, dx = e - 1$. Pour la médiane, calculer d'abord la fonction de répartition $F_X(t) = \int_0^t \frac{1}{x}\, dx = \ln(t)$. La médiane m satisfait $F_X(m) = \frac{1}{2}$, donc $m = e^{\frac{1}{2}}$.

Exercice 7 Dans un magasin, un certain article est vendu en moyenne en 30 exemplaires par mois - formellement, le nombre d'article vendu par mois est une variable aléatoire X avec $\mathbb{E}(X) = 30$.

(a) Donner une borne supérieure sur la probabilité que l'on vende plus de 45 articles ou plus le prochain mois. On doit d'abord observer que X ne prend que des valeurs positives (pas de nombre d'articles vendus négatif !). On peut donc appliquer l'inégalité de Markov : $P(X \geqslant 45) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{45} = \frac{2}{3}$. **1 point**

(b) Si l'on sait en plus que l'écart-type $\sigma(X)$ est de 3 articles, que pouvez vous dire sur la probabilité que le nombre d'articles vendus soit compris entre 25 et 35 ? $P(|X - 30| \leq 5) = 1 - P(|X - 30| \geqslant 6) \overset{Tchebychev}{\geqslant} 1 - \frac{\sigma(X)^2}{6^2} = 1 - \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$. Donc la probabilité en question est au moins $\frac{1}{4}$. **1 point**