

Contrôle continu n° 2
Corrigé

Exercice 1. *On lance un dé non pipé.*

1. *Soit X la variable aléatoire qui vaut 1 si on a obtenu un 6 et 0 sinon. Quelle est la loi de X ? Donnez son espérance.*

$$X \sim \mathcal{B}(1, \frac{1}{6}), \mathbb{E}(X) = \frac{1}{6}.$$

2. *On effectue 4 lancers successifs et on note Y le nombre de 6 obtenus. Quelle est la loi de Y ? Donnez son espérance.*

$$Y \sim \mathcal{B}(4, \frac{1}{6}), \mathbb{E}(Y) = 4 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

3. *On effectue des lancers successifs et on note Z le nombre de lancers qu'il a fallu pour obtenir le premier 6. Quelle est la loi de Z ? Donnez son espérance.*

$$Z \sim \mathcal{G}(\frac{1}{6}), \mathbb{E}(Z) = \frac{1}{1/6} = 6.$$

Exercice 2. *On lance un dé non pipé. On note A l'évènement "le résultat est divisible par 2" et B l'évènement "le résultat est divisible par 3". Montrez que A et B sont indépendants.*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Exercice 3. *Soient X une variable aléatoire réelle. Soit Y la variable aléatoire réelle définie par $Y = 3X + 5$. Exprimez la fonction de répartition de Y en fonction de celle de X .*

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(3X + 5 \leq t) = \mathbb{P}(X \leq \frac{t-5}{3}) = F_X(\frac{t-5}{3}).$$

Exercice 4. *On lance une pièce de monnaie deux fois de suite. Cette pièce étant truquée, on obtient pile avec une probabilité $p = \frac{1}{4}$*

1. *Soit N le nombre de "pile" obtenus. Quelle est la loi de N ?*

$$N \sim \mathcal{B}(2, 1/4)$$

2. On vous propose le jeu suivant : si vous obtenez 2 fois "pile" vous gagnez 5 euros, si vous obtenez 1 fois "pile" vous gagnez 1 euros, si vous obtenez 2 fois "face" vous ne gagnez rien. Calculez l'espérance et la variance de votre gain X .

$$\mathbb{E}(X) = 5 \times \mathbb{P}(N = 2) + 1 \times \mathbb{P}(N = 1) + 0 \times \mathbb{P}(N = 0) = \frac{5}{16} + \frac{6}{16} = \frac{11}{16}.$$

$$\mathbb{E}(X^2) = 5^2 \times \mathbb{P}(N = 2) + 1^2 \times \mathbb{P}(N = 1) + 0^2 \times \mathbb{P}(N = 0) = \frac{25}{16} + \frac{6}{16} = \frac{31}{16}.$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{31}{16} - \frac{121}{256} = \frac{375}{256}.$$

3. La participation à ce jeu coûte 1 euros. Le jeu est-il intéressant ?

Au final le jeu vous rapporte X euros moins votre mise de 1 euros. Notons Y cette sommes.

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X - 1) = \mathbb{E}(X) - 1 = -\frac{5}{16}.$$

Le jeu n'est donc pas intéressant pour vous.