Université de Rennes 1 | Année 2009–2010
UFR Mathématiques
Module VAR

Examen Terminal
Mardi 15 décembre 2009 — Durée : 2 heures

Aucun appareil électronique (calculatrice, téléphone portable...) et aucun document est autorisé. Toutes les réponses devront être justifiés.

Exercice 1 Pour chacun des énoncés suivants, dites s'il est vrai ou faux, et justifiez votre réponse.

(a) Le sous-ensemble $U = \{(x, y) \mid x < y^2\}$ de $\mathbb{R}^2$ est ouvert. Vrai, car $U = f^{-1}(]0, +\infty[)$, où $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto y^2 - x$ est une fonction continue.

(b) Si A est une sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$ et $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application continue, alors l'image $f(A)$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^m$. Faux, par exemple pour $n = m = 1$, on a que $A = [1, +\infty)$ est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$, et $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue sur A, mais l'image de A est l'intervalle $(0, 1]$, qui n'est pas fermé.

(c) La courbe paramétrée $\gamma(t) = \binom{3+2\cdot\cos(t)}{5+2\cdot\sin(t)}$ est de courbure constante $\rho = 2$. Faux, l'image est un cercle de rayon 2, qui est de courbure constante $\frac{1}{2}$.

(d) La fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\binom{x}{y} \mapsto \binom{x+y^2}{y}$ est localement inversible en $\binom{0}{0}$. Vrai, car f est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa matrice Jacobienne en $(0, 0)$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui est inversible.

Exercice 2 On considère la fonction $f(x, y) = 3x^3 - xy^2 - 6y$.

(a) Déterminer les points critiques de cette fonction, ainsi que leur nature (maximum, minimum, ou point de selle). Solution : $\nabla f = \binom{9x^2-y^2}{-2xy-6}$, et un petit calcul montre que ce vecteur est égal à $\binom{0}{0}$ si et seulement si $\binom{x}{y} = \binom{1}{-3}$ ou $\binom{x}{y} = \binom{-1}{3}$. Ceci donne les deux points critiques. Ensuite, la matrice Hessienne est $\begin{pmatrix} 18x & -2y \\ -2y & -2x \end{pmatrix}$, et son déterminant est $-36x^2 - 4y^2$, ce qui est strictement négatif (sauf pour $\binom{x}{y} = \binom{0}{0}$). En particulier, les deux points critiques sont des points de selle.

(b) Calculer le dévéloppement de Taylor à l'ordre 2 autour du point $(x_*, y_*) = (1, 2)$. Solution : $f(1, 2) = -13$, et d'après (a) on a pour $\binom{x}{y} = \binom{1}{2}$ que $\nabla f = \binom{5}{-10}$ et Hess= $\begin{pmatrix} 18 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$, donc

$$f(x_* + x, y_* + y) \cong -13 + 5x - 10y + 9x^2 - 4xy - y^2 + \text{Erreur}$$

(c) Déterminez l'ensemble des points (x, y) où $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$. Solution : $-2xy - 6 = 0$ ssi ($x \neq 0$ et $y = \frac{-3}{x}$)

(d) On considère la courbe de niveau $C = \{(x, y) \mid f(x, y) = -13\}$. Cette courbe contient le point $(1, 2)$ (admis). Décider s'il est possible de décrire C dans un voisinage du point $(1, 2)$ par une fonction implicite $y = \phi(x)$. Si oui, calculer $\phi'(1)$. Solution : vu que $\frac{\partial f}{\partial y}\binom{1}{2} \neq 0$, ceci est possible, et $\phi'(1) = -\frac{\partial f}{\partial x}\binom{1}{2} / \frac{\partial f}{\partial y}\binom{1}{2} = \frac{-5}{-10} = \frac{1}{2}$.

Exercice 3 On considère la fonction

$$g\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 + xy$$

et la surface de niveau

$$S = \{(x, y, z) \mid g(x, y, z) = 12\}$$

On considère également la fonction

$$f\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto x + 2z$$

Trouver le maximum et minimum de la fonction f, restreint à la surface S. La condition de Lagrange dit qu'il existe un nombre λ tel que $\nabla f = \lambda\ \nabla g$, donc

$$(2x + y, 2y + x, 2z) = \lambda\ (1, 0, 2)$$

La deuxième équation dit que $x = -2y$, ensuite la première que $-3y = \lambda$, et ensuite la troisième que $z = \lambda = -3y$. Maintenant la condition que $g(x, y, z) = 12$ implique que $12 = 4y^2 + y^2 + 9y^2 - 2y^2 = 12y^2$. On en déduit que $y = \pm 1$, donc il n'y a que deux points critiques : $(-2, 1, -3)$ et $(2, -1, 3)$. Le premier doit être le minimum de f (car $f(-2, 1, -3) = -8$) et le deuxième le maximum (car $f(2, -1, 3) = 8$).

Exercice 4 On considère la moitié d'une boule standard dans $\mathbb{R}^3$:

$$B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,\ z \geqslant 0\}$$

On supposera que la demi-boule B est fabriquée un seul matériel de poids spécifique $= 1$. Vous pouvez utiliser sans démonstration que le volume de la boule standard est $\frac{4\pi}{3}$, et donc $\text{Masse}(B) = \text{Vol}(B) = \frac{2\pi}{3}$. Calculez le barycentre de B.

Indication On peut utiliser des coordonnées sphériques (voir Figure 1). Rappellez vous de la formule $dx\ dy\ dz = r^2 \cdot \sin(\phi)\ dr\ d\phi\ d\theta$. Solution : Soient (x_*, y_*, z_*) les coordonnées du barycentre. Par symétrie, $x_* = y_* = 0$.

$$\begin{aligned} z_* &= \frac{3}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r \cdot \cos(\phi) \cdot r^2 \cdot \sin(\phi)\ dr\ d\phi\ d\theta \\ &= \frac{3}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot \int_0^{\pi/2} \cos(\phi)\sin(\phi)\ d\phi \cdot \int_0^1 r^3\ dr \\ &= 3 \cdot (\frac{1}{2}\sin^2(\phi))|_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} \cdot \frac{1}{4} \\ &= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Figure 1

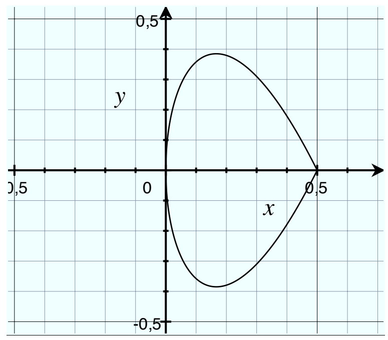

Figure 2

Exercice 5 On considère la courbe dans le plan

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ t^3 - t \end{pmatrix}, \qquad t \in [-1, 1]$$

(voir Figure 2) et le champ de vecteurs $\vec{F}(\binom{x}{y}) = \binom{-y}{0}$.

(a) Calculer l'intégrale curviligne du champ $\vec{F}$ sur la courbe γ. Solution : $\gamma'(t) = \binom{t}{3t^2-1}$, donc

$$\int_{-1}^{1} \gamma'(t) \cdot \vec{F}(\gamma(t)) \; dt = \int_{-1}^{1} t \cdot (-t^3 + t) \; dt = \int_{-1}^{1} -t^4 + t^2 \; dt = -\frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$$

(b) En déduire l'aire de la région du plan découpé par la courbe γ. Solution : la courbe contourne la région dans le sens géométrique, et elle est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, donc d'après un corollaire du théorème de Green-Riemann discuté en cours on a Aire= $\frac{4}{15}$.