LICENCE
VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Feuille d'Exercices 1

Exercice 1.1
Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. Montrer les identités suivantes :

(a) $x \cdot y = \dfrac{1}{4} \, (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$

(b) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Exercice 1.2
Trouver l'équation du plan $P \subset \mathbb{R}^3$ passant par $A = (4, 2, -1)$ et orthogonal à $\vec{n} = (1, -1, 3)$.

Exercice 1.3
Trouver l'équation du plan $P \subset \mathbb{R}^3$ passant par les trois points suivants : $(2, 1, 1)$, $(3, -1, 1)$, $(4, 1, -1)$.

Exercice 1.4
1. Si $x, y \in \mathbb{R}^3$ tel que $x \wedge y = \vec{0}$ et $x \cdot y = 0$, montrer qu'au moins un des vecteurs x ou y est nul.
2. Si $x \neq \vec{0}$, $x \wedge y = x \wedge z$ et $x \cdot y = x \cdot z$, montrer que $y = z$.

Exercice 1.5
Soient $x = (x_1 , x_2)$, $y = (y_1 , y_2)$ et $P \subset \mathbb{R}^2$ le parallèlogramme engendré par x, y .
Utiliser le produit vectoriel afin de montrer que l'aire de P est donnée par $|\det(x, y)| = |x_1\, y_2 - x_2\, y_1|$.

Exercice 1.6
Considérons la parallèlépipède $P \subset \mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs x , y , z .
1. Montrer que le volume de P est donné par le "produit mixte" $(x \wedge y) \cdot z$.
2. Déduire que $\mathrm{vol}(P)$ est également donné par $|\det(x, y, z)|$.

Exercice 1.7
Considérons $F(t) = \left(\dfrac{2t}{1+t^2} \; , \; \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \; , \; 1 \right)$.
Montrer que l'angle entre $F(t)$ et $F'(t)$ est constant.

Exercice 1.8
Considérons l'hélice $F(t) = (a\, \cos t \; , \; a \sin t \; , \; bt)$ avec $a, b > 0$.
Montrer que l'angle entre l'axe Oz et la droite tangente est constante et $\cos\theta = b/\sqrt{a^2 + b^2}$.

Exercice 1.9
Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ une courbe telle que $F(t_0) = X_0 \neq \vec{0}$ soit le point le plus proche de l'origine.
Montrer que $F'(t_0)$ est orthogonal à $F(t_0)$.

Exercice 1.10
Si $F(t)$ et $\|F(t)\|$ sont intégrables sur $[a, b]$, montrer que :

$$\| \int_a^b F(t)\, dt \| \leqslant \int_a^b \|F(t)\|\, dt$$

Déduire que le chemin le plus court entre deux points A et B dans $\mathbb{R}^n$ passe par le segment $\overline{AB}$.

Exercice 1.11
On considère $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire

$$\begin{aligned}(x_1\,,\, x_2) \circ (y_1\,,\, y_2) &\equiv (x_1\,,\, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= x_1\, y_1 + 2x_2\, y_2\end{aligned}$$

1. Calculer la longueur de $V_1 = (1, 1)$ et $V_2 = (1, -1)$ ainsi que l'angle entre V_1 , V_2.
2. Montrer que ce produit scalaire vérifie les propriétés PS1-PS5 du cours.

Courbure

Exercice 1.12
Considérons l'hélice $\gamma(t) = (\cos t\,,\, \sin t\,,\, t)$.

1. Calculer l'abscisse curviligne $s(t) = \displaystyle\int_0^t \|\gamma'(u)\|\, du$.
2. Trouver la paramétrisation unitaire $\gamma(s) = \gamma(t(s))$ de l'hélice.
3. Calculer la courbure $\rho(s)$ de $\gamma(s)$.

Exercice 1.13
Soit $\gamma(s)$ une courbe paramétrée unitaire.
Montrer que $\rho(s) = \left|\dfrac{d\phi}{ds}\right|$ où $\phi(s)$ est l'angle entre $T(s)$ et le vecteur $e_1 = (1, 0)$.

Exercice 1.14
Soit $\gamma(t) \in \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée.
Il est parfois utile de pouvoir calculer ρ directement, sans passer par une paramétrisation unitaire de γ.
Montrer que $\rho = \|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\| \;/\; \|\gamma'(t)\|^3$.

Exercice 1.15
Trouver la courbure de la spirale $\gamma(t) = (e^{-t} \cos t\,,\, e^{-t} \sin t\,,\, 0)$.
Que se passe-t-il lorsque $t \to \infty$?

Exercice 1.16
Soit $\gamma(s) \subset \mathbb{R}^3$ telle que $\|\gamma(s)\| = \|\gamma'(s)\| = 1\,,\ \forall s$.
Montrer que $\rho(s) \geqslant 1$.
(Produit scalaire + Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Produit Scalaire

Exercice 1.17

Calculer l'angle entre les vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ dans $\mathbb{R}^n$.

Que se passe-t-il lorsque $n \to \infty$?

Exercice 1.18
Notons par $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ l'ensemble des fonctions continues $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ est un espace vectoriel.
2. Montrer que $\langle f, g\rangle \ \equiv \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\ dx$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([0, 2\pi])$.
   ($\mathcal{C}([0, 2\pi])$ est-il de dimension finie ou infinie selon vous ?)
3. Montrer que les fonctions $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\ ,\ \dfrac{\cos mx}{\sqrt{\pi}}\ ,\ \dfrac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$ $(n, m = 1, 2, ...)$ sont orthogonaux sur $[0, 2\pi]$.
   (On peut calculer directement. Autrement, on peut montrer que $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{inx}e^{-imx}dx = \delta_{nm}$.)

LICENCE
VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Feuille d'Exercices 2

Exercice 2.1
Donner l'ensemble de définition et l'image de $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2 - y^2}$.

Exercice 2.2
Dessiner le graphe de $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.

Exercice 2.3
Dessiner le graphe de $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13$.

Exercice 2.4
Dessiner la surface $S = \{(x,y,z) | z = -y^2\} \subset \mathbb{R}^3$.

Exercice 2.5
Tracer les courbes de niveau pour les fonctions suivantes :

(a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ (on pourra utiliser les coordonnées polaires)

(b) $f(x,y) = x^2 - y^2$

(c) $f(x,y) = e^{xy}$

Exercice 2.6
Montrer que la fonction $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ est continue en $(0,0)$.

Exercice 2.7
Si $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont continues, montrer que $f + g$ est continue.

Exercice 2.8
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction ayant la propriété : "$f^{-1}(I)$ est ouvert pour tout intervalle ouvert I dans $\mathbb{R}$".
Montrer que f est continue.

Exercice 2.9
Lesquels des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont ouverts ?

(a) $\{(x, y) \mid |x| < 1 \;\text{ et }\; |y| < 1\}$
(b) $\{(x, y) \mid xy < 1\}$
(c) $\{(x, y) \mid y > x^2 \;\text{ et }\; |x| < 2\}$
(d) $\{(x, y) \mid x > y\}$

Exercice 2.10
Donner l'intérieur, l'extérieur et la frontière des sous-espaces de $\mathbb{R}^2$ suivants :

(a) $\{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 \leqslant 2\}$

(b) $\left\{\left(x \;,\; \sin\dfrac{1}{x}\right) \mid x > 0\right\}$

(c) $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 2.11
Soit $X \subset \mathbb{R}^n$. Montrer que ∂X est fermé.

LICENCE
VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Feuille d'Exercices 3

Exercice 3.1
Lesquels des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^2$) sont compacts ?

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant 1\}$
(b) $[0\,,\,+\infty[$
(c) les rationnels, $\mathbb{Q}$
(d) $\mathbb{Q} \cap [0,1]$
(e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$
(f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } y = x^2\}$
(g) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{x}\right\}$

Exercice 3.2
Soient $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ compacts. Montrer que $X \cap Y$ et $X \cup Y$ sont compacts.

Exercice 3.3
Soient $X \subset \mathbb{R}^n$ compact, $f : X \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que $f(X) \subset \mathbb{R}$ est compact.

Exercice 3.4
Soient $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ compacts. Montrer que $X \times Y \subset \mathbb{R}^{m+n}$ est compact.

Exercice 3.5
Calculer les dérivées partielles de $f(x,y) = \mathrm{Ln}(xy)$.

Exercice 3.6
On appelle fonction homogène d'ordre α toute fonction vérifiant $f(\lambda x\,,\,\lambda y) = \lambda^\alpha\, f(x,y)$, $\forall \lambda > 0$.
Montrer que $f(x,y)$ homogène vérifie l'identité d'Euler : $x\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$.

Exercice 3.7
Les côtés d'une boîte (longueur, largeur et hauteur) grandissent à une vitesse de 1 cm/sec., 2 cm/sec. et 3 cm/sec. respectivement.
A quelle vitesse le volume s'accroît-il lorsque longueur = 2 cm, largeur = 3 cm et hauteur = 6 cm ?

Exercice 3.8
Soit $g(t) = f(x_0 + \alpha t\,,\, y_0 + \beta t)$. Calculer $g'(0)$.

Exercice 3.9
Trouver l'équation du plan tangent à la surface donnée par le graphe de $f(x,y) = x^2 + y^2$ au point (2,2,8).

Exercice 3.10
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $g(x,y) = f(x-y\,,\,y-x)$. Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y}$.

LICENCE
VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Feuille d'Exercices 4

Exercice 4.1
Soit f la fonction définie sur $\{(x\,,\,y)\,/\,y \neq 0\}$ par : $f(x\,,\,y) = \dfrac{1+x^2+y^2}{y}\,\sin y$.
Montrer que cette fonction est continue et étudier ses prolongements possibles.

Exercice 4.2
Même question pour $g(x\,,\,y) = \dfrac{1+x+y}{x^2-y^2}$ définie sur $\{(x\,,\,y)\,/\,x^2 \neq y^2\}$.

Exercice 4.3
Même question pour $h(x\,,\,y) = \dfrac{|y|}{x^2}\;e^{-\frac{|y|}{x^2}}$.

Exercice 4.4
Soit E l'ensemble des éléments $(x\,,\,y)$ de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $1 \leqslant |x|+|y| \leqslant 2$.
Montrer que E est fermé.
La formule $f(x\,,\,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ définit-elle sur E une fonction continue ?
Trouver les points où f atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure.

Exercice 4.5
On considère la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x\,,\,y) = \sup\left\{\dfrac{x}{1+|y|}\;,\;\dfrac{y}{1+|x|}\right\}$.
Cette fonction est-elle continue ?

Exercice 4.6
On donne deux fonctions g et h de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on suppose que la dérivée de h ne s'annule pas.
Montrer que la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x\,,\,y) = \dfrac{g(x)-g(y)}{h(x)-h(y)}$ où $h(x) \neq h(y)$ a un prolongement continu sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4.7
Parmi les applications suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, dire (en vous justifiant) lesquelles sont continues et lesquelles sont discontinues. (Indication : dans plusieurs cas, on peut utiliser des coordonnées polaires.)

$f_1(x\,,\,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ $\qquad f_2(x\,,\,y) = y\,\sin x$ $\qquad f_3(x\,,\,y) = (x^2+y^2)\,\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$

$f_4(x\,,\,y) = y\,\sin\dfrac{1}{x}$ $\qquad f_5(x\,,\,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ $\qquad f_6(x\,,\,y) = \dfrac{y}{x^2}\;e^{-\frac{|y|}{x^2}}$

Exercice 4.8
Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On note φ l'application définie sur $\{(x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \neq 0\}$ par : $\varphi(x\,,\,y) = (x+y)\; f\left(\dfrac{x}{y}\right)$.
Montrer que φ est continue.
Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que φ puisse être prolongée continuement sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4.9
Etudier la continuité de la fonction f définie par :
$f(x\,,\,y) = x^2$ si $|x| \leqslant |y|$
$f(x\,,\,y) = y^2$ si $|x| > |y|$

Exercice 4.10
Montrer que la fonction f définie par : $f(x\,,\,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ a une limite lorsque $\|(x\,,\,y)\|$ tend vers l'infini.

Exercice 4.11
Montrer que l'application définie par :
$f(x\,,\,y) = \dfrac{x^4}{y(y-x^2)}$ si $y \neq 0$ et $y - x^2 \neq 0$
$f(x\,,\,y) = 0$ si $y = 0$ ou si $y - x^2 = 0$
n'est pas continue en $(0\,,\,0)$ mais que ses restrictions à toute droite passant par l'origine sont continues en ce point.

LICENCE
VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Feuille d'Exercices 5

Exercice 5.1
Trouver l'équation du plan tangent à la surface $S = \{(x, y, z) \mid xyz = 1\}$ en $(1, 1, 1)$.

Exercice 5.2
Considérons les sphères $S_1 : (x - c)^2 + y^2 + z^2 = 3$ et $S_2 : x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1$.
Trouver une valeur de c pour laquelle, à tout point d'intersection de S_1 et S_2 , les plans tangents sont orthogonaux.

Exercice 5.3
Soit $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$.
Dans quelle direction f s'accroît-elle le plus rapidement au point $(-1, 1)$?
Trouver la dérivée directionnelle dans cette direction.

Exercice 5.4
Trouver une dérivée directionnelle de $f(x, y, z) = 3x - 5y + 2z$ en $(2, 2, 1)$ dans la direction de la normale (extérieure) à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Exercice 5.5
Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur la boule $B(X_0\,;\,r) \subset \mathbb{R}^n$.
Si $\dfrac{\partial f}{\partial X_1} = \cdots = \dfrac{\partial f}{\partial X_n} = 0$ sur $B(X_0\,;\,r)$, montrer que f est constante sur la boule.

Exercice 5.6
Soient $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application linéaire, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application telle que $|g(x)| \leqslant \|x\|^2$.
Posons $f(x) = L(x) + g(x)$.
Montrer que $Df(0) = L$.

Exercice 5.7
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \|x\|^2$.
Déterminer les points x pour lesquels f est différentielle, ainsi que la différentielle.

LICENCE
VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Feuille d'Exercices 6

Exercice 6.1
Déterminer tous les extrema locaux et absolus ainsi que les points de selle de la fonction $f(x,y) = xy(1-x^2-y^2)$ sur le carré $\{(x,y) \,|\, 0 \leqslant x \leqslant 1\ ,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

Exercice 6.2
La température sur la sphère $x^2+y^2+z^2 = 4$ est donnée par $T(x,y,z) = 2+xz+y^2$.
Trouver les points les plus chauds et ceux les plus froids.

Exercice 6.3
Cet exercice a pour but de démontrer l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \quad \text{pour des nombres } a_i \geqslant 0$$

1. Utiliser la méthode de Lagrange pour trouver la valeur maximale de $f(x_1\,,\,\ldots\,,\,x_n) = x_1^2 \cdots x_n^2$ sur la sphère de rayon $r>0$: $x_1^2+\cdots+x_n^2 = r^2$. Pourquoi f admet-elle une valeur maximale ?
2. Déduire de la question précédente que $x_1^2 \cdots x_n^2 \leqslant \left(\dfrac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}\right)^n$.
3. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique.

Exercice 6.4
Trouver la différentielle de $f(x,y) = (x^2+y^2)^{1/2}$ en $(1,1)$.

Exercice 6.5
Trouver la différentielle de $f(x,y) = 2x+3y$ en $(x_0\,,\,y_0)$.

Exercice 6.6
Estimer $(0.99 \cdot e^{0.02})^8$.

Exercice 6.7
Trouver les points critiques de :
(a) $f(x,y) = (x^2+y^2)\,e^{-(x^2+y^2)}$
(b) $f(x,y) = x\,e^y$

Exercice 6.8
Trouver les extrema de $f(x,y) = x^2+5y^2-6x+10y+6$.

Exercice 6.9
Sans calcul, trouver la nature de $(0,0)$ pour la fonction $f(x,y) = -\,xy+xy^2+x^2y^2$.

Exercice 6.10
Trouver les extrema locaux ainsi que les points de selle pour $f(x,y) = x^3+3xy+y^3$. Déterminer l'approximation de Taylor de f jusqu'à l'ordre 2 en tout point.

Exercice 6.11
La température dans $\mathbb{R}^3$ est donnée par $T(x,y,z) = x-2y+z$.
Trouver les points sur la sphère $x^2+y^2+z^2 = 1$ où T est maximale.

LICENCE
VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Feuille d'Exercices 7

Exercice 7.1
Décrire l'image de la bande $\{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 2\pi\}$ par l'application $f(x, y) = (e^x \cos y \ , \ e^x \sin y)$.

Exercice 7.2
Calculer la matrice jacobienne de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par : $f(r, \varphi, \theta) = (r \sin\varphi \cos\theta \ , \ r \sin\varphi \sin\theta \ , \ r \cos\varphi)$.

Exercice 7.3
Calculer la matrice jacobienne $\mathrm{Jac}(f)$ de $f(x, y) = (x+y \ , \ x^2 y)$ et trouver les points où le déterminant de $\mathrm{Jac}(f)$ est nul.

Exercice 7.4
Calculer $df(x)$ de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par : $f(x) = Mx + B$, M étant une matrice $(3, 3)$ et $B \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 7.5
Soit $h(x) = g(f(x))$ avec $f = (f_1 \ , \ \dots \ , \ f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Montrer que $\nabla h(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_k} (y) \ \nabla f_k(x)$, $y = f(x)$.

Exercice 7.6
Trouver les points de $\mathbb{R}^2$ tels que $f(x, y) = (x^2 - y^2 \ , \ 2xy)$ soit localement inversible.

Exercice 7.7
Montrer que $f(x, y) = x\, e^y - y + 1 = 0$ définit une fonction $y = \varphi(x)$ implicitement en $(-1, 0)$ et calculer $\varphi'(-1)$.

Exercice 7.8
Regardons la fonction $f(u, v) = (x, y)$ avec $x = (v^2 - u^2)/2$ et $y = uv$.
1. Déterminer dans quels points cette fonction est localement inversible.
2. Nous observons que $f(1, 2) = (\frac{3}{2}, 2)$ et que f est localement inversible dans $(1, 2)$. Dans un voisinage de $(u, v) = (1, 2)$ on peut donc écrire $u = u(x, y)$ et $v = v(x, y)$. Trouver les formules pour $du/dx, du/dy, dv/dx$ et dv/dy au point $(\frac{3}{2}, 2)$.

Exercice 7.9
1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ différentiable en x . Montrer que $df(x)(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.
2. Réciproquement, supposons que $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = b$. Posons $T(h) = bh$, $\forall h \in \mathbb{R}$.
   Montrer que $df(x)(h) = T(h) = bh$.

Exercice 7.10
Soit $\varphi(y) = \displaystyle\int_1^2 \sin(y\, e^x)\, dx$. Calculer $\varphi'(y)$.

Exercice 7.11
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\,tx}}{1+t^2}\, dt$.
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$. Calculer $f(0)$ et $f'(0)$.

Exercice 7.12
Soit $f(x, y, z) = e^{(x^2+y^2+z^2)}$.

1. Déterminer les points de continuité de f .
2. Décrire les ensembles de niveau de f si $c = -1$, $c = 1$, $c = 2$.

Exercice 7.13
Soit $f(x, y) = y\, e^{xy}$.

1. Calculer $\nabla f(x, y)$.
2. Dans quelle direction $f(x, y)$ s'accroît-elle le plus vite à partir du point $(1, 1)$?
   Donner le vecteur unitaire de cette direction.

Exercice 7.14
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 3$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 5$.
Calculer $g'(0)$ lorsque $g(t) = f(2t + t^2 + e^t\ ,\ \sin t + \cos t)$.

Exercice 7.15
Trouver tous les points P sur la surface $S : 2x^2 - y^2 + z^2 = 25$ pour lesquels le plan tangent TpS est orthogonal à l'axe Oz .

Exercice 7.16
Considérer la fonction $f(x, y) = x^3 - 3x^2 + y^2$.

1. Déterminer les points critiques de f ainsi que leur nature.
2. Trouver les extrema de f sur le carré $\{(x, y) \mid -2 \leqslant x, y \leqslant 2\}$.

Exercice 7.17
Trouver la valeur maximale de $f(x, y, z) = x + z$ sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (par la méthode de Lagrange).

Exercice 7.18
Soit $f(x, y) = (xy\, ,\, e^{xy})$.
Calculer la matrice jacobienne de f et déterminer le rang de cette matrice en tout point (x, y).
En quels points f est-il localement inversible ?
Donner l'image du vecteur (a, b) pour $df(1, 0)$.

LICENCE
VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Feuille d'Exercices 8

Exercice 8.1
Evaluer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\iint_R xy(x+y)\,dxdy \qquad R : [0,1]\times[0,1]$

(b) $\displaystyle\iint_R \sin(x+y)\,dxdy \qquad R : [0,\pi/2]\times[0,\pi/2]$

(c) $\displaystyle\int_0^\pi\int_0^x x\sin y\,dydx$

Exercice 8.2
Dessiner les régions suivantes :

(a) $\{(x,y)\mid x+y\leqslant 1\ ,\ x\geqslant 0\ ,\ y\geqslant 0\}$

(b) $\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$

(c) $\{(x,y)\mid x^2\leqslant y\leqslant x\ ,\ 0\leqslant x\leqslant 1\}$

Exercice 8.3
Calculer $\displaystyle\iint_R x\cos(x+y)\,dxdy$, R région triangulaire de sommets à $(0,0)$, $(\pi,0)$, (π,π).

Exercice 8.4
Calculer l'aire de la région $\{(x,y)\mid y\leqslant x\leqslant y^2\ ,\ 1\leqslant y\leqslant 2\}$.

Exercice 8.5
Evaluer $\displaystyle\int_0^\pi\int_y^\pi \frac{\sin x}{x}\,dxdy\,.$

Exercice 8.6
Evaluer $\displaystyle\iint_R x^2\,dxdy$ lorsque $R=\{(x,y)\mid x\geqslant 0\ ,\ 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2\}$.

Exercice 8.7
Soit f définie sur $R=[0,1]\times[0,1]$ comme suit :

$$f(x,y)=\begin{cases}1-x-y & \text{si } x+y\leqslant 1\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Calculer $\displaystyle\iint_R f\,.$

LICENCE
VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Feuille d'Exercices 9

Exercice 9.1

1. Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2+1)^{3/2}}$, $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant a\}$.
2. Laissant $a \to \infty$, montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy\,dx}{(x^2+y^2+1)^{3/2}} = 2\pi$.

Exercice 9.2

Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^3}\,dx\,dy$, $D = \{(x,y) \mid 4 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 9\}$.

Exercice 9.3

1. Soient R le rectangle de sommets $(1,2)$, $(1,5)$, $(3,2)$, $(3,5)$ et $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire donnée par la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
   Trouver l'aire de $G(R)$.
2. Même question avec l'application linéaire G donnée par la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$.

Exercice 9.4

Soit $(x,y) = G(u,v) = (u+v\,,\,u^2-v)$. Soit $A = \{(u,v) \mid u \geqslant 0\,,\, v \geqslant 0\,,\, u+v \leqslant 2\}$.
Calculer $\displaystyle\iint_{G(A)} \frac{1}{\sqrt{1+4x+4y}}\,dx\,dy$.

Exercice 9.5

On considère $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-y^2)^{1/2} dy\,dx$.

1. Décrire la région sur laquelle on intègre et montrer qu'elle est de type I et de type II.
2. Echanger l'ordre d'intégration et évaluer.

Exercice 9.6

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^1 dz\,dy\,dx$. Décrire la région sur laquelle on intègre.

Exercice 9.7

Calculer $\displaystyle\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, $D = \{(x,y,z) \mid 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4\}$.

Exercice 9.8

Calculer l'intégrale double $\displaystyle\iint_S xy^2\, dx\, dy$ où S est limité par la parabole $y^2 = 2px$ et la droite $x = p$.

Exercice 9.9

Calculer l'intégrale double $\displaystyle\iint_S xy\, dx\, dy$ où le domaine d'intégration S est limité par les axes de coordonnées et par l'arc d'astroïde d'équations $x = R\cos^3 t$, $y = R\sin^3 t$ avec $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$.

Exercice 9.10

Calculer l'intégrale double $\displaystyle\iint_S (x^2+y^2)\, dx\, dy$ où le domaine d'intégration S est limité par le demi-cercle de rayon a et de centre (0,0), et situé au-dessus de l'axe des x.

Exercice 9.11

Calculer l'intégrale double $\displaystyle\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2-y^2}\, dy\, dx$.

Exercice 9.12

Calculer l'intégrale double $\displaystyle\iint_S \sqrt{a^2-x^2-y^2}\, dx\, dy$ où S est la boucle du lemniscate d'équations $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ et $x \geqslant 0$.

Exercice 9.13

Calculer l'aire de la surface limitée par les paraboles d'équations $y^2 = 10x + 25$ et $y^2 = -6x + 9$.

Exercice 9.14

Calculer l'intégrale triple $\displaystyle\iiint_V x^2 dx\, dy\, dz$ où V est l'ellipsoïde d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leqslant 1$.

Exercice 9.15

Calculer l'intégrale triple $\displaystyle\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz$ où V est la boule de centre (0,0,0) et de rayon R.

Exercice 9.16

Calculer l'intégrale triple $\displaystyle\iiint_V \frac{1}{(1+x+y+z)^3}\, dx\, dy\, dz$ où V est limité par les plans de coordonnées et par le plan d'équation $x + y + z = 1$.

Exercice 9.17

Calculer l'intégrale triple $\iiint_V (x+y+z)^2 \, dx \, dy \, dz$ où V est la portion commune au paraboloïde $\{2az \geqslant x^2+y^2\}$ et à la boule $\{x^2+y^2+z^2 \leqslant 3a^2\}$.

Exercice 9.18

Calculer l'intégrale triple $\iiint_V z \, dx \, dy \, dz$ où V est le domaine limité par le plan $z=0$ et par le demi-ellipsoïde supérieur $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

Exercice 9.19

Calculer l'intégrale triple $\iiint_V z \, dx \, dy \, dz$ où V est le domaine limité par le plan $z=h$ et par le cône d'équation $z^2=\dfrac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$.

Exercice 9.20

Calculer l'intégrale triple $\iiint_V dx \, dy \, dz$ où V est le domaine limité par les surfaces d'équations $x^2+y^2+z^2=2Rz$ et $x^2+y^2=z^2$, et contenant le point $(0,0,R)$.

Exercice 9.21

Calculer l'intégrale triple $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2} \, dz \, dy \, dx$.

Exercice 9.22

Calculer le volume du corps limité par le plan xOy, le cylindre $x^2+y^2=ax$ et la sphère $x^2+y^2+z^2=a^2$.

LICENCE
VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Feuille d'Exercices 10

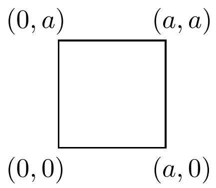
Exercice 10.1
Calculer les intégrales curvilignes $\displaystyle\int_C F \cdot dr$ lorsque :

(a) $F(x,y) = (x^2 - 2xy\,,\, y^2 - 2xy)$
C : graphe de $y = x^2$ entre $(-1,1)$ et $(1,1)$

(b) $F(x,y,z) = (y^2 - z^2\,,\, 2yz\,,\, -x^2)$
C : tracée par $r(t) = (t\,,\, t^2\,,\, t^3)$ avec $0 \leqslant t \leqslant 1$

Exercice 10.2
Calculer $\displaystyle\int_C F \cdot dr$ lorsque :

$F(x,y) = (x^2 - y^2\,,\, 2xy)$



C : le carré (pour $a > 0$)
et le chemin est traversé dans le sens géométrique.

Exercice 10.3
Calculer $\displaystyle\int_C F \cdot dr$ lorsque :

$F(r,\theta) = (-4\sin\theta\,,\, 4\sin\theta)$ et C : spirale de $(1,0)$ à $(0,0)$ le long de $r = e^{-\theta}$

Exercice 10.4
F est-il un champ de gradient ? Si oui, construire une fonction potentielle :
(a) $F(x,y) = (x,y)$
(b) $F(x,y,z) = (2xy^3\,,\, x^2z^3\,,\, 3x^2yz^2)$
(c) $F(x,y) = (xy\cos xy + \sin xy\,,\, x^2\cos xy)$
(d) $F(x,y,z) = (x+z\,,\, -y-z\,,\, x-y)$

Exercice 10.5
Trouver une fonction potentielle pour $F(x) = \|x\|^p\, x$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \overline{0}$.
(On traitera le cas $p = -2$ séparément.)

Exercice 10.6
On considère $F(x,y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}\ ,\ \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{0}$.

1. Montrer que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{0}$.
2. Calculer $\displaystyle\int_C F \cdot dr$, C tracée par $r(t) = (\cos t\,,\, \sin t)$ avec $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.
3. Les deux précédentes questions sont-elles contradictoires ?

LICENCE
VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Feuille d'Exercices 11

Exercice 11.1
Evaluer les intégrales curvilignes suivantes à l'aide du théorème de Green-Riemann.

(a) $\displaystyle\oint_C 5xy\,dx + x^3\,dy$, C :

(b) $\displaystyle\oint_C 2xy\,dx + (x^2+y^2)\,dy$, C : ellipse $4x^2+9y^2=36$

(c) $\displaystyle\oint_C xy\,dx + \sin y\,dy$, C : triangle de sommets$(1\,,\,1)\,,(2\,,\,2)\,,(3\,,\,0)$

Exercice 11.2
Utiliser le théorème de Green-Riemann pour trouver l'aire de :

a) l'ellipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

b) la région entre les courbes $y=x^3$ et $y=\sqrt{x}$

Exercice 11.3
Soit $f(x,y)$ une fonction (à valeurs réelles) vérifiant $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ sur S délimité par C.
Calculer $\displaystyle\oint_C \frac{\partial f}{\partial y}\,dx - \frac{\partial f}{\partial x}\,dy\,.$

Exercice 11.4
Evaluer $\displaystyle\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$ lorsque C est le carré de sommets $(-2\,,\,-2)\,,(-2\,,\,2)\,,(2\,,\,-2)\,,(2\,,\,2)\,.$

Exercice 11.5 Soit $F(x,y)=\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}\,,\,\dfrac{x}{x^2+y^2}\right).$
Quelles sont les valeurs possibles pour $\displaystyle\oint_C F\cdot dr$ lorsque C est une courbe simple fermée dans $\mathbb{R}^2\setminus\overline{0}$?

LICENCE
VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Feuille d'Exercices 12

Exercice 12.1
Calculer l'aire de $S_+ = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \ , \ z \geqslant 0\}$ en utilisant la représentation paramétrée $f(u, v) = (a \cos u \cos v \ , \ a \sin u \cos v \ , \ a \sin v)$.

Exercice 12.2
Calculer l'aire de la partie du plan $x + y + z = a$ contenue dans le cylindre $x^2 + y^2 = a^2 \ \ (a > 0)$.

Exercice 12.3
Soient S le triangle de sommets $(1\,,\,0\,,\,0)\,,(0\,,\,1\,,\,0)\,,(0\,,\,0\,,\,1)\,,F(x, y, z) = (x, y, z)$ et n le vecteur unitaire normal à S avec z coordonnée $\geqslant 0$.
Calculer $\displaystyle\iint_S F \cdot n \, dS$.

Exercice 12.4
Calculer $\displaystyle\iint_S \mathrm{rot}(F) \cdot n \, dS$ à l'aide du théorème de Stokes lorsque :

a) $F(x, y, z) = (y^2\,,\,xy\,,\,xz)\ ,\ S_+ = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\ ,\ z \geqslant 0\}$,
n vecteur unitaire normal à S_7 avec z coordonnée $\geqslant 0$.

b) $F(x, y, z) = (y, z, x)\ ,\ S_+ = \{(x, y, z) \mid z = 1 - x^2 - y^2\ ,\ z \geqslant 0\}$,
n vecteur unitaire normal à S avec z coordonnée $\geqslant 0$.

Exercice 12.5
Utiliser le théorème de Stokes pour montrer que $\displaystyle\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = \pi\,a^2\sqrt{3}$ lorsque C est la courbe d'intersection de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ avec le plan $x + y + z = 0$.

Exercice 12.6
Utiliser le théorème de Stoke pour calculer $\displaystyle\int_C (y + z)\,dx + (z + x)\,dy + (x + y)\,dz$ lorsque C est la courbe d'intersection du cylindre $x^2 + y^2 = 2y$ avec le plan $y = z$.

LICENCE
VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Feuille d'Exercices 13

Divergence, Théorème de Gauss

Exercice 13.1
Calculer, à l'aide du théorème de Gauss, le flux à travers la sphère d'unité $x^2+y^2+z^2=1$ de $F(x,y,z)$ lorsque :

a) $F(x,y,z) = (2x\,,\,2y\,,\,2z)$
b) $F(x,y,z) = (x^3\,,\,y^3\,,\,z^3)$

Exercice 13.2
Supposons que $\mathrm{div}(F) > 0$ à l'intérieur de la boule unité $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$.
Montrer qu'il existe (au moins) un point p sur la sphère $x^2+y^2+z^2=1$ tel que $F(p)$ ne soit pas tangent à la sphère.

Exercices supplémentaires

Exercice 13.3
Evaluer :

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 \cos(x^2)\, dx\, dy$

(b) $\displaystyle\iint_R \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\, dx\, dy$

$R = \{(x,y,)\mid x \geqslant 0\,,\, y\geqslant 0\,,\, x^2+y^2\leqslant 1\}$

Exercice 13.4
Evaleur $\displaystyle\iiint_V z\, dx\, dy\, dz$ lorsque V est le tétraèdre solide délimité par les quatre plans :
$x=0\,,\, y=0\,,\, z=0\,,\, x+y+z=1\,.$

Exercice 13.5
Trouver une fonction potentielle pour $F(x,y) = (2x+3y^3\,,\,9xy^2+2y)$ et ensuite calculer $\displaystyle\int_C F\cdot dr$ lorsque C est la courbe tracée par $r(t) = (t\,,\,\sin t)$ avec $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

Exercice 13.6
Calculer $\displaystyle\iint_R (-\sin x\, e^{\cos y} + \sin y\, e^{\sin x})\, dx\, dy\,.$

Exercice 13.7
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \|x\|^2$.
Déterminer les points x pour lesquels f est différentiable, ainsi que la différentielle.

Exercice 13.8
Trouver les extrema locaux ainsi que les points de selle pour $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3$.

Exercice 12.9
La température est donnée par $T = (x, y, z) = x - 2y + z$.
Trouver les points sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ où T est maximale.

Conseil pour l'Examen

1. **Savoir résoudre tous les exercices (feuilles 1 à 13).**
2. **Toujours faire un dessin !**
3. **Revoir surfaces, plans tangents, extrema (première partie du cours).**