Cours de LICENCE
VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées
Première partie : Calcul différentiel

Chapitre 1 : Géométrie de $\mathbb{R}^n$

1 – Produit scalaire, norme et distance dans $\mathbb{R}^n$

Définition
Si $X = (x_1 \dots x_n)$ et $Y = (y_1 \dots y_n)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on définit leur **produit scalaire** par :

$$X \cdot Y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

Définition
On appelle **norme** de X (ou longueur) $\|X\| = (X \cdot X)^{1/2}$ et la **distance** entre deux vecteurs $d(X\,,\,Y) = \|X - Y\|$.

Proposition
On a les propriétés suivantes :
(1) $X \cdot Y = Y \cdot X$
(2) $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + XZ$
(3) $(\alpha\, X) \cdot Y = \alpha(X \cdot Y)$
(4) $X \cdot X \geqslant 0$ avec $X \cdot X = 0$ si et seulement si $X = 0$

Théorème
Le produit scalaire vérifie l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** $(X \cdot Y)^2 \leqslant \|X\|^2\ \|Y\|^2$ avec égalité si et seulement si X et Y sont colinéaires.

Théorème
La norme définie précédemment s'appelle **norme euclidienne** et vérifie :
(i) $\|X\| = 0$ si et seulement si $X = 0$
(ii) $\|X\| > 0$ si $X \neq 0$
(iii) $\|\alpha\, X\| = |\alpha|\ \|X\|$
(iv) $\|X + Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\|$

Définition
L'**angle** entre deux vecteurs non nuls est $\theta \in [0\,,\,\pi]$ vérifiant $\cos\theta = \dfrac{X \cdot Y}{\|X\|\ \|Y\|}$.

Définition
X et Y de $\mathbb{R}^n$ sont **orthogonaux** si et seulement si $X \cdot Y = 0$.

Définition (plan dans $\mathbb{R}^3$)
Soient $A = (x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)$ un point de $\mathbb{R}^3$ et $N = (a\,,\,b\,,\,c)$ un vecteur non nul.
Le plan passant par A et orthogonal à N est $P = \{X \in \mathbb{R}^3 / (X - A) \cdot N = 0\}$.

2 – Produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$

Définition
Si $X = (x_1\,,\,x_2\,,\,x_3)$ et $Y = (y_1\,,\,y_2\,,\,y_3)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on définit le **produit vectoriel** de X et de Y par : $X \wedge Y = (x_2\,y_3 - x_3\,y_2\,,\,x_3\,y_1 - x_1\,y_3\,,\,x_1\,y_2 - y_1\,x_2)$.

Aide mémoire : cela "vaut" $\det \begin{pmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$.

Théorème
On a les propriétés suivantes :

(1) $X \wedge Y = -\,Y \wedge X$
(2) $X \wedge (Y + Z) = X \wedge Y + X \wedge Z$
(3) $\alpha\,X \wedge Y = X \wedge \alpha\,Y = \alpha(X \wedge Y)$
(4) $X \cdot (X \wedge Y) = 0$ et $Y \cdot (X \wedge Y) = 0$
(5) $\|X \wedge Y\|^2 = \|X\|^2\,\|Y\|^2 - (X \cdot Y)^2$ (identité de Lagrange)

Interprétation géométrique de $X \wedge Y$
$\|X \wedge Y\| = \|X\|\,\|Y\|\,\sin\theta$ est l'**aire du parallélogramme** engendré par X et Y.

Chapitre 2 : Courbes paramétrées

1 – Définition

Une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ s'appelle fonction vectorielle ou **courbe paramétrée**.
On exprime $F(t)$ à l'aide des fonctions coordonnées $F(t) = (f_1(t)\,,\,\dots\,,\,f_n(t))$.

Exemples

(1) $F(t) = (x_0 + ta\,,\, y_0 + tb\,,\, z_0 + tc)$
(2) $F(t) = (R\cos t\,,\, R\sin t)$

2 – Limite – Continuité – Dérivation

Définition
Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

(1) $\lim\limits_{t\to p} F(t) = \left(\lim\limits_{t\to p} f_1(t)\,,\,\dots\,,\,\lim\limits_{t\to p} f_n(t)\right)$
(2) $F'(t) = (f_1'(t)\,,\,\dots\,,\,f_n'(t))$
(3) $\displaystyle\int_a^b F(t)\,dt = \left(\int_a^b f_1(t)\,dt\,,\,\dots\,,\,\int_a^b f_n(t)\,dt\right)$

Théorème
Si $F\,,\,G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ et $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont dérivables alors :

(i) $(F+G)'(t) = F'(t) + G'(t)$
(ii) $(uF)'(t) = u'(t)F(t) + u(t)F'(t)$
(iii) $(F\cdot G)'(t) = F'(t)\cdot G(t) + F(t)\cdot G'(t)$
(iv) $(F\wedge G)'(t) = F'(t)\wedge G(t) + F(t)\wedge G'(t)$ si $n = 3$
(v) $F(u(t))' = F'(u(t))\cdot u'(t)$

Corollaire
Si une courbe paramétrée $F(t)$ est dérivable et si $\|F(t)\|$ est constante alors $F(t)\cdot F'(t) = 0$. (Autrement dit, si $F(t)$ est sur une sphère centrée en 0, alors $F(t)$ et $F'(t)$ sont orthogonaux).

Exemple
$F(t) = (\cos t\,,\,\sin t)$

3 – Etude géométrique de $F'(t)$: tangente

Définition
Si $F(t) = (x_1(t)\,,\,\dots\,,\,x_n(t))$ est dérivable et $F'(t) \neq 0$, on voit que $F'(t) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(t+h) - F(t)}{h}$.

Définition
Soit C la courbe tracée par F.

Si $F'(t_0) \neq 0$ alors la droite passant par $F(t_0)$ de vecteur directeur $F'(t_0)$ est appelée droite tangente à C en $F(t_0)$.
$F'(t_0)$ est un vecteur tangent à C en $F(t_0)$.

4 – Longueur d'une courbe

Définition
La **longueur de l'arc** de la courbe $F(t)$ entre $t = a$ et $t = b$ est donnée par $\displaystyle\int_a^b \|F'(t)\|\, dt$.

5 – Paramétrisation unitaire – Courbure

Cas $n = 3$
Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée.
On suppose que les dérivées $\gamma^{(n)}$ existent pour tout n et que $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout t.
On dit que γ est **régulière**.
Alors :

(i) $S(t) = \displaystyle\int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\|\, du$ est la longueur de l'arc entre t_0 et t.

(ii) $\dfrac{dS}{dt} = \|\gamma'(t)\| > 0$

De ce qui précède découle :

Définition
$t \to s(t)$ admet une fonction réciproque $s \to t(s)$ avec $t'(s) = \dfrac{1}{\|\gamma'(t(s))\|}$.
On note $\Gamma(s)$ la fonction $\Gamma(s) = \gamma(t(s))$ et on l'appelle **paramétrisation unitaire** de γ car on a $\|\Gamma'(s)\| = 1$.

Définition
La courbure de $\Gamma(s)$ est donnée par $\rho(s) = \|\Gamma''(s)\|$.

Proposition
Si γ n'est pas une paramétrisation unitaire alors la **courbure** est donnée par $\rho(t) = \dfrac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$.

Chapitre 3 : Fonctions de plusieurs variables

1 – Définitions

Définition
Une fonction f de D dans $\mathbb{R}$ (où D est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$) s'appelle fonction numérique de n variables.
D est le domaine de définition de f.
$\{f(x) \,/\, x \in D\}$ est l'image de f.
$\{(x\,,\, f(x)) \,/\, x \in D\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ est appelé graphe de f.

Exemples
$f(x\,,\, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$
$f(x\,,\, y\,,\, z) = Ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)$

$f(x\,,\, y) = \sqrt{y^2 - x^2}$

2 – Représentation géométrique

- Cas d'une fonction de deux variables $f(x\,,\, y)$
  a) On considère le graphe $G(f) = \{((x\,,\, y)\,,\, f(x\,,\, y)) \,/\, (x\,,\, y) \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
  Exemple : $f(x\,,\, y) = x^2 + y^2$.
  Le graphe est un paraboloïde de révolution.
  b) On considère les courbes de niveau $\{(x\,,\, y) \in D \,/\, f(x\,,\, y) = C\}$.
  Dans l'exemple précédent, les courbes de niveau sont les cercles $\{(x\,,\, y) \,/\, x^2 + y^2 = C \geqslant 0\}$.
- Cas d'une fonction de plus de deux variables
  Le graphe étant dans $\mathbb{R}^4$, on ne peut le dessiner.
  Si $n = 3$, on utilise les surfaces de niveau $\{(x\,,\, y\,,\, z) \in D \,/\, f(x\,,\, y\,,\, z) = C\}$.
  Exemple : $f(x\,,\, y\,,\, z) = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$.

3 – Etude de certaines surfaces quadratiques

On considère le graphe du polynôme quadratique de la forme $z = Lx^2 + 2Mxy + Ny^2$.

Exemple : $z = x^2 + y^2$
$z = ax^2 + by^2 \quad , \quad a > 0$ et $b > 0$
$z = x^2 - y^2$

Proposition
Il existe des coordonnées orthogonales $X\,,\, Y\,,\, Z$ dans lesquelles $Z = k_1\, X^2 + k_2\, Y^2$.

Chapitre 4 : Fonctions continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

1 – Topologie de $\mathbb{R}^n$

Définition
Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$.
On appelle $B(a\,,\,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, \|x - a\| < r\}$ la **boule ouverte** de centre a et de rayon r.

Exemple
Dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ on retrouve les intervalles, les disques, les boules ouvertes.

Proposition
Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$.
Alors une des trois conditions suivantes est vérifiée :

(i) $\exists r > 0$ tel que $B(a\,,\,r) \subset A$

(ii) $\exists r > 0$ tel que $B(a\,,\,r) \subset A^c$ où $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$

(iii) $\forall r > 0$, $B(a\,,\,r)$ contient des points de A et de A^c.

Définition
L'**intérieur** de A (noté $\mathrm{int}(A)$ ou $\overset{\circ}{A}$) est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ vérifiant (i).
L'**extérieur** de A (noté $\mathrm{ext}\ A$) est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ vérifiant la condition (ii).
La **frontière** de A (notée ∂A) est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ vérifiant la condition (iii).
La **fermeture** de A (notée $\overline{A}$) est la réunion de A et de ∂A.

Exemples dans $\mathbb{R}^2$
$A = \{x \in \mathbb{R}^2 \,/\, \|x\| < 1\}$
$A = \{(n\,,\,0) \,/\, n \in \mathbb{Z}\}$

Définition
Un ensemble A de $\mathbb{R}^n$ est :

(i) **ouvert** si $\forall a \in A$, $\exists r > 0$ tel que $B(a\,,\,r) \subset A$

(ii) **fermé** si A^c est ouvert.

Proposition
A est ouvert si et seulement si $\overset{\circ}{A} = A$.
A est fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.

Exemples
$A_1 = \{(x\,,\,y) \,/\, x^2 + y^2 < 1\}$ est ouvert.
$A_2 = \{(x\,,\,y) \,/\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ est fermé.
$A_3 = A_1 \cup \{(1\,,\,0)\}$ n'est ni ouvert ni fermé.
$]0\,,\,1[\subset \mathbb{R}$ est ouvert dans $\mathbb{R}$.
$]0\,,\,1[\times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ n'est ni ouvert ni fermé.
$[0\,,\,1] \subset \mathbb{R}$ est fermé dans $\mathbb{R}$.
$[0\,,\,1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$ est fermé dans $\mathbb{R}^2$.

Proposition

1. $\mathbb{R}^n$ et $\oslash$ sont ouverts (et donc aussi fermés).
2. Toute réunion d'ouverts est un ouvert.
3. Toute intersection <u>finie</u> d'ouverts est un ouvert.

2 – Suites dans $\mathbb{R}^n$

Définition
Une suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ **converge** dans $\mathbb{R}^n$ vers $b \in \mathbb{R}^n$ si $\forall\varepsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $p \geqslant N$ entraîne $\|X_p - b\| < \varepsilon$.

Remarques

1. On dit que b est **la limite** de la suite (X_p) et on note $X_p \to b$.
2. $X_p \to b$ si et seulement si $\forall\varepsilon > 0$ la boule $B(b\,,\,\varepsilon)$ contient toute la suite sauf un nombre fini de X_p.

Proposition
A est fermé si et seulement si pour toute suite convergente contenue dans A et convergente, la limite est dans A.

3 – Limite et continuité de fonctions

Définition
Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ (où $D \subset \mathbb{R}^n$) a pour limite b en X_0 si $X_0 \in \overline{D}$ et si $\forall\varepsilon > 0\,,\ \exists\delta > 0$ tel que :
$X \in D\ \ ,\ \ \|X - X_0\| < \delta \Rightarrow |f(X) - b| < \varepsilon$.

Notation
Dans ce cas $b = \lim\limits_{X\to X_0} f(X)$.

Définition

(i) $f : D \to \mathbb{R}$ est **continue en** $X_0 \in D$ si et seulement si $\lim\limits_{X\to X_0} f(X) = f(X_0)$.

(ii) f est **continue sur** D si et seulement si elle est continue en tout point de D.

Théorème
Si f et g sont continues alors $f + g$, fg , $\dfrac{f}{g}$ et $f \circ g$ sont continues lorsqu'elles sont définies.

Exemples
$f(x\,,\,y) = e^{xy}$ continue sur $\mathbb{R}^2$
$f(x\,,\,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus 0$

Théorème
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue sur $\mathbb{R}^n$.

(ii) $\forall b \in \mathbb{R}^n$, $\forall X_p$ avec $X_p \to b$ on a : $f(X_p) \to f(b)$ dans $\mathbb{R}$.

(iii) $\forall\theta$ ouvert de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(\theta) = \{X \in \mathbb{R}^n \,/\, f(X) \in \theta\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

(iv) $\forall F$ fermé de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(F) = \{X \in \mathbb{R}^n \,/\, f(X) \in F\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Exemples
$f(x\,,\,y) = -\,x^2 + y$
$f(x\,,\,y\,,\,z) = x^2 - y^2 + z^2 + 1$

Remarque
Si $D \neq \mathbb{R}^n$, il faut modifier les points (iii) et (iv), et dire que $f^{-1}(\theta)$ est un ouvert de D et $f^{-1}(F)$ est un fermé de D.

Chapitre 5 : Ensembles compacts

1 – Rappels

Soit $f[a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors :

(i) f est bornée sur $[a\,,\,b]$ s'il existe $M > 0$ tel que pour tout $\in [a\,,\,b]$, $|f(x)| \leqslant M$.

(ii) f atteint ses bornes inférieure et supérieure s'il existe c et d dans $[a\,,\,b]$ tel que $f(c) = \inf f(x)$ et $f(d) = \sup f(x)$.

Ceci n'est pas toujours vrai sur des intervalles de type $[a\,,\,b[$ non fermé.

2 – Généralisation

Définition
$X \subset \mathbb{R}^n$ est compact si X est fermé et borné (borné veut dire qu'il existe $R > 0$ tel que $X \subset B(0\,,\,R)$).

Exemple

Théorème (Bolzano-Weierstrass)
Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ compact.
Alors toute suite $(x_n) \subset X$ contient une sous-suite x_{n_k} qui converge vers un point de X.

Remarque
La réciproque de ce théorème est vraie.

3 – Fonctions continues sur un ensemble compact

Théorème
Soit $f : X \to \mathbb{R}$ (avec X compact) continue. Alors :

(i) f est bornée sur X.

(ii) f atteint ses bornes inférieure et supérieure.

Définition
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est uniformément continue si $\forall \varepsilon > 0\,, \exists \delta > 0$ tel que $\|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Théorème
Soit f continue de X dans $\mathbb{R}$ avec X compact.
Alors f est uniformément continue sur X.

Chapitre 6 : Dérivées partielles

1 – Rappels

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
La dérivée de f en x, si elle existe, est : $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

2 – Dérivée partielle

Définition
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
On définit la dérivée partielle de f par rapport à x_i par $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_1\,,\,\ldots\,,\,x_i + h\,,\,x_{i+1}\,,\,\ldots\,,\,x_n) - f(x_1\,,\,\ldots\,,\,x_n)}{h}$
si cette limite existe.

Notation
Cela se note $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1\,,\,\ldots\,,\,x_n)$, $f_{x_i}(x_1\,,\,\ldots\,,\,x_n)$, $D_i f(x_1\,,\,\ldots\,,\,x_n)$.
Dans le cas de deux variables on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,\,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h\,,\,y) - f(x\,,\,y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,\,y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x\,,\,y+k) - f(x\,,\,y)}{k}$$

Exemple
(1) $f(x\,,\,y) = e^{xy^2}$
(2) $f(x\,,\,y) = x^2 + 3y^2 - 2xy$
(3) $f(x\,,\,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
(4) $f(x\,,\,y\,,\,z) = xy^2 + z$

3 – Interprétation géométrique

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0\,,\,y_0)$ est la pente de la tangente à la courbe $z = f(x\,,\,y_0)$ en $(x_0\,,\,y_0)$.

4 – Gradient

Définition
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction ayant des dérivées partielles.
Son gradient en P, noté $\nabla f(P)$ est le vecteur $\nabla f(P) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(P)\,,\,\ldots\,,\,\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(P) \right)$.

Exemple
(1) $f(x\,,\,y) = x^2\,y^3$
(2) $f(x\,,\,y\,,\,z) = x^2\,\sin(yz)$

Remarque
Le gradient peut être considéré comme un vecteur de $\mathbb{R}^n$ mais aussi comme une matrice $1 \times n$.

Théorème
Si f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ avec des gradients, alors :

(i) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$

(ii) $\nabla(cf) = c\,\nabla f$ où $c \in \mathbb{R}$

5 – Dérivées partielles et continuité

Une fonction peut avoir des dérivées partielles sans être continue ! !

Exemples

(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x\,,\,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

a des dérivées partielles en $(0\,,\,0)$ mais n'y est pas continue.

(2) $f(x\,,\,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x\,,\,y) \neq (0\,,\,0) \\ 0 & \text{en}(0\,,\,0) \end{cases}$

admet des dérivées partielles en tout point mais n'est pas continue en $(0\,,\,0)$.

Pour "dépasser" cette difficulté, on définit la différentielle (ou dérivée totale) ou on considère les fonctions ayant des dérivées partielles continues encore appelées fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

6 – Dérivation composée

Théorème
Si g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = f(r(t))$ où f est $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et r dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, alors g est dérivable et on a $g'(t) = \nabla f(r(t)) \cdot r'(t)$.

Exemple

$f(x\,,\,y) = xy^2$

$r(t) = (t\,,\,t^2)$

7 – Plan tangent

Définition
Soit la surface $z = f(x\,,\,y)$.
Le plan tangent à cette surface en $(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)$ a pour équation :

$$(z - z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0\,,\,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0\,,\,y_0)(y - y_0)$$

Exemple
La sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Définition
Le plan tangent à la surface S d'équation $f(x\,,\,y\,,\,z) = C$ en $P \in S$ est le plan passant par P et orthogonal à $\nabla f(P)$.

8 – Accroissements finis

Théorème
Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, $X = (x_1\,,\,\ldots\,,\,x_n)$, $H = (h_1\,,\,\ldots\,,\,h_n)$.
Alors il existe $\theta \in]0\,,\,1[$ tel que $f(X+H) - f(X) = \nabla f(X+\theta H)\cdot H$.

9 – Dérivée selon un vecteur

Définition
Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $V \in \mathbb{R}^n$.
La dérivée selon le vecteur V en X est définie par $D_V\, f(X) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(X+tV) - f(X)}{t}$.

Remarque
Si $V = e_i$, on retrouve $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

Proposition
On a $D_V\, f(X) = \nabla f(X)\cdot V$.

Interprétation géométrique du gradient
La variation de f est la plus forte dans la direction de $\nabla f(X)$.

Chapitre 7 : La différentielle

1 – Cas des fonctions d'une variable

(i) f est dérivable en X_0 si $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(X_0+h)-f(X_0)}{h}$ existe.
Sa valeur ℓ est notée $f'(X_0)$.

(ii) On peut, de manière équivalente, écrire $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(X_0+h)-f(X_0)-\ell h}{h} = 0\,.$
On remarque que $h \to L(h) = \ell h$ est une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, que l'on appelle **différentielle** de f en X_0 et que l'on note $df(X_0)$.

(iii) Si f est dérivable en X_0, alors pour h petit : $f(X_0+h)$ est "voisin" de $f(X_0)+f'(X_0)h$.
Donc $h \to f(X_0)+f'(X_0)h$ est une application affine qui "approche" $f(X_0+h)$.

2 – Cas de fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

Définition
f est différentiable en X s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{\|H\| \to 0} \frac{f(X+H)-f(X)-L(H)}{\|H\|} = 0$$

L'application L est **la différentielle de** f **en** X et se note $df(X)$.

Remarque
Comme dans le cas $n = 1$ on a $f(X+H)$ "voisin" de $f(X)+df(X)\cdot H$, on a $f(X+H)$ est "approché" par l'application affine $f(X)+df(X)\cdot H$.
La différentielle, lorsqu'elle existe, est unique.

Proposiition 1
Si f est différentiable en X, alors ses dérivées partielles existent et on a :

$$\begin{aligned} df(X)\cdot H &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(X)\,h_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X)\,h_n \\ &= \nabla f \cdot H \end{aligned}$$

Remarque
La matrice de l'application linéaire $df(X)$ dans la base canonique est le gradient $\nabla f(X)$.

Proposiition 2
Si f est différentiable en X alors f est continue en X.

Remarque
L'existence des dérivées partielles de f n'implique pas la différentiabilité.
Mais :

Théorème 1
Si f admet des dérivées partielles et si elles sont continues alors f est différentiable.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exemples et utilisation

3 – Règle de différentiation

Proposition 3
Si f et g sont différentiables on a :

(i) $d(f+g)(X) = df(X) + dg(X)$

(ii) $d(\lambda f)(X) = \lambda\, df(X)$

(iii) $d(fg)(X) = f(X)\, dg(X) + g(X)\, df(X)$

(iv) $d\left(\dfrac{f}{g}\right)(X) = \dfrac{g(X)\, df(X) - f(X)\, dg(X)}{g^2(X)}$

4 – Remarques

Si $f : U \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors :

(i) Si f est $\mathcal{C}^1$ sur U alors f est différentiable sur U et les dérivées $\dfrac{\partial\, f}{\partial\, x_i}$ existent sur U.
Les réciproques ne sont pas vraies!!

(ii) Si f est différentiable en $X_0 \in U$ alors l'application affine $A(H) = f(X_0) + df(X_0) \cdot H$ a pour graphe l'espace tangent au graphe de f en X_0.

Exemple
Droite tangente
Plan tangent

5 – Dérivées partielles successives

Les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)$ sont des fonctions de $x_1, \ldots, x_n$, et il arrive souvent qu'elles sont eux-même dérivables.

Définition
On écrit, lorsqu'elle existe, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right)$ et on dit qu'il s'agit d'une **dérivée partielle seconde** de f.

Exemple
$f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^3y^4$. Alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 12x^2y^3 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$.

Théorème (Schwarz)
Si $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}$ existent et sont continues dans une boule autour de $(a_1 \ldots a_n)$ alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}$$

Chapitre 8 : Formule de Taylor et extrema par les fonctions de deux variables

1 – Rappel

La recherche des **extrema locaux** pour une fonction d'une variable :

(i) On recherche les points critiques ($f'(x) = 0$).

(ii) On étudie la dérivée seconde f'' si a est un point critique et si
$f''(a) > 0$ il y a un minimum local,
$f''(a) < 0$ il y a un maximum local,
$f''(a) = 0$ il faut approfondir l'étude.

2 – Extrema locaux de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$, c'est-à-dire que ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 existent et sont continues.

Définition
f a un **minimum** (resp. **maximum**) local en $(x_0\,,\,y_0)$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que : $\forall (x\,,\,y) \in B((x_0\,,\,y_0)\,,\,\varepsilon)$ alors $f(x\,,\,y) \geqslant f(x_0\,,\,y_0)$ (resp. $f(x\,,\,y) \leqslant f(x_0\,,\,y_0)$).

Exemple
$f(x\,,\,y) = -x^2 - y^2$
$f(x\,,\,y) = x^2 + y^2$
$f(x\,,\,y) = x^2 - y^2$

Proposition 1
Si f admet un **extremum local** en $(x_0\,,\,y_0)$ alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0\,,\,y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0\,,\,y_0) = 0$.

Définition
Si en $(x_0\,,\,y_0)$ on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0\,,\,y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0\,,\,y_0) = 0$ on dit que $(x_0\,,\,y_0)$ est **un point critique**.

Remarque
Un extremum local est un point critique mais la réciproque n'est pas vraie.

3 – Formule de Taylor

Définition Soit $f(x,y)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. La **matrice hessienne** de f en (x_0, y_0) est la matrice $\mathrm{Hess}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$
où $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0\,,\,y_0)$, $B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0\,,\,y_0)$, $C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0\,,\,y_0)$.

Exemple
Calculer la matrice Hessienne de $f(x\,,\,y) = 4xy - x^4 - y^4$.

Théorème 1 (Formule de Taylor à l'ordre 2, en $X = (x_0, y_0)$)

$$f(X+H) = f(X) + \nabla f(X) \cdot H + \frac{1}{2} H^t \; \mathrm{Hess}(x_0, y_0) \; H + \|H\|^2 \varepsilon(H)$$

Théorème 2
Soient $f(x\,,\,y)$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $(x_0\,,\,y_0)$ un point critique. Soit $\triangle = AC - B^2 = \det(\mathrm{Hess}(x_0, y_0))$. Alors :
si $\triangle > 0$ et $A > 0\,,$ f a un minimum local en $(x_0\,,\,y_0)$
si $\triangle > 0$ et $A < 0\,,$ f a un maximum local en $(x_0\,,\,y_0)$
si $\triangle < 0$, f n'a ni maximum ni minimum, elle a un point selle
si $\triangle = 0$ on ne peut conclure.

4 – Extrema de f sur un compact $K \subset \mathbb{R}^2$

Rappel
f étant continue sur un compact a des minima et maxima sur ce compact.

On procède de la manière suivante :

(i) On cherche les points critiques et les extrema locaux dans $Int(K)$.

(ii) On analyse f sur ∂K.

Exemple
Etude de $f(x\,,\,y) = x^2 - y^2$ sur $K = \{(x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

5 – Extrema liés (multiplicateur de Lagrange)

Il s'agit de trouver les extrema de $f(x\,,\,y\,,\,z)$ lorsque $(x\,,\,y\,,\,z)$ appartient à une surface S définie par $g(x\,,\,y\,,\,z) = C$.

Exemple
Maximiser $x^2\,y^2\,z^2$ lorsque $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Définition
Un point $P = (x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)$ est un minimum (resp. maximum) local pour f, lié à la contrainte $g(x\,,\,y\,,\,z) = C$ si :

(i) $g(P) = C$

(ii) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(P) \leqslant f(Q)$ (resp. $f(P) \geqslant f(Q)$) pour tout $Q \in S \cap B(P\,,\,\varepsilon)$.

Théorème (de Lagrange)
Soit $f(x\,,\,y\,,\,z)$ et $g(x\,,\,y\,,\,z)$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\nabla g \neq 0$ sur S.
Alors si f admet un **extrema lié** en $(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)$ on a : $\nabla f(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0) = \lambda\,\nabla g(x_0\,,\,y_0\,,\,z_0)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est appelé multiplicateur de Lagrange.

Remarque
Si P est un extremum lié, on a $\nabla f(P)$ parallèle à $\nabla g(P)$.
La réciproque n'est pas vraie.

Exemple
Sur l'exemple précédent on montre la méthode de résolution.

Chapitre 9 : Etude de fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

1 – Quelques exemples

1. De $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$:
   (a) $F(x\,,\,y) = (e^x\,\cos y\,,\,e^x\,\sin y)$
   (b) $F(r\,,\,\theta) = (r\,\cos\theta\,,\,r\,\sin\theta)$
2. De $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$: $F(X) = \dfrac{X}{\|X\|}$.
3. De $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$: $F(x\,,\,y) = (x\,,\,y\,,\,x^2+y^2)$.
4. De $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ linéaire : $F(x_1 \dots x_n) = A(x_1 \dots x_n)$ où A est une matrice n colonnes et m lignes.
   On peut exprimer F en termes de composantes $F(x_1 \dots x_n) = (f_1(x_1 \dots x_n)\,,\,\dots\,,\,f_m(x_1 \dots x_n))$.

2 – Limite et continuité

Dans l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^m$ on remplace les habituelles valeurs absolues par des normes.

3 – Différentielle

Définition
F de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est **différentiable** en $X \in \mathbb{R}^n$ s'il existe une **application linéaire** L de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ telle que :

$$\lim_{\|H\|\to 0} \frac{F(X+H) - F(X) - L\cdot H}{\|H\|} = 0\,.$$

L est la **différentielle** de F en X et se note : $dF(X)$.

Théorème 1
F est différentiable en X si et seulement si ses composants sont différentiables et on a :

$$dF(X)\cdot H \;\;=\;\; (\nabla f_1(X)\cdot H\,,\,\dots\,,\,\nabla f_m(X)\cdot H)\,.$$

Définition
La matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(X) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(X) \end{bmatrix}$$

est la matrice de $dF(X)$ et est appelée **matrice jacobienne** de F en X et se note : $J(F)(X)$.

Théorème 2
Si F a des composantes de classe $\mathcal{C}^1$ alors elles sont différentiables et F est également différentiable.

Exemple

(i) Trouver la matrice jacobienne de F en $(1\,,\,1)$ de : $F(x\,,\,y) = (x^2 + y^2\,,\,e^{xy})$.

(ii) Trouver la différentielle de $F(x\,,\,y\,,\,z) = (x\,,\,y\,,\,z)$.

(iii) Trouver la différentielle de $F(r\,,\,\theta) = (r\,\cos\theta\,,\,r\,\sin\theta)$.

4 – Propriétés de la différentielle

Proposition
Si F de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est linéaire, alors $dF(X) = F$.

Proposition
Si F est différentiable en X alors F est continue en X.

5 – Différentielles des fonctions composées

Si F est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, si G est une fonction de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^q$, alors $G \circ F$ est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^q$.

Théorème 3
Si F est différentiable en X, et si G est différentiable en $F(X)$, alors $G \circ F$ est différentiable en X et on a :

$$d(G \circ F)(X) \quad = \quad dG(F(X)) \circ dF(X)\,.$$

Exemple
$F(x\,,\,y) = (x^2 + y^2\,,\,e^{xy})$
$G(u\,,\,v) = (xy\,,\,\sin x\,,\,x^2\,y)$

Chapitre 10 : Fonctions implicites – Inversion locale

1 – Fonctions implicites : cas $f(x\,,\,y) = 0$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On considère la courbe de niveau $\{f(x\,,\,y) = 0\} = L_0$.

Définition
On dit que la fonction $y = \varphi(x)$ est **définie implicitement par** $f(x\,,\,y) = 0$ si $f(x\,,\,\varphi(x)) = 0$, c'est-à-dire si $(x\,,\,\varphi(x)) \in L_0$.
Alors on dit que $y = \varphi(x)$ est une **fonction implicite** de $f(x\,,\,y) = 0$.

Exemple
$f(x\,,\,y) = \ln(xy) - \sin x \quad$ avec $xy > 0$
$f(x\,,\,y) = x^2 + y^2 - 1$

Théorème (des fonctions implicites)
Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $(x_0\,,\,y_0)$ un point tel que $f(x_0\,,\,y_0) = 0$.
Si $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0\,,\,y_0) \neq 0$ alors :

(i) Il existe une fonction implicite $y = \varphi(x)$ de classe $\mathcal{C}^1$, définie sur l'intervalle ouvert $B(x_0\,,\,\varepsilon)$, tel que $f(x\,,\,\varphi(x)) = 0$ et $y_0 = \varphi(x_0)$.

(ii) La dérivée de φ est donnée par $\varphi'(x) = \dfrac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x\,,\,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x\,,\,\varphi(x))}$ en tout point où $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x\,,\,\varphi(x)) \neq 0$.

Exemple : étude au point $(1\,,\,1)$ de $f(x\,,\,y) = x^2\,y + 3y^3\,x^4 - 4$

2 – Fonctions implicites : cas $f(x_1\,\ldots\,x_n) = 0$

Théorème
Si $f\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et si $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\,(X_0) \neq 0$ alors :

(i) La fonction implicite $x_n = \varphi(x_1\,\ldots\,x_{n-1})$ existe sur une boule ouverte $B((x_{1,0}\,\ldots\,x_{n-1,0})\,,\,\varepsilon)$ et on a : $f(x_1\,\ldots\,x_{n-1}\,,\,\varphi(x_1\,\ldots\,x_{n-1})) = 0$.

(ii) $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} \;=\; \dfrac{-\,\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1\,\ldots\,x_{n-1}\,,\,\varphi(x_1\,\ldots\,x_{n-1}))}{\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1\,\ldots\,x_{n-1}\,,\,\varphi(x_1\,\ldots\,x_{n-1}))}$

3 – Inversion locale

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, F une application de U dans $\mathbb{R}^n$ et $V = F(U) \subset \mathbb{R}^n$.

Définition
F est **inversible** sur U s'il existe une application G de V dans $\mathbb{R}^n$ telle que $G \circ F = \mathbf{1}_U$ et $F \circ G = \mathbf{1}_V$.

Exemples

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = x^3$

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = x^2$

(3) Si $A \in \mathbb{R}^n$, soit F de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ avec $F(X) = X + A$.

(4) $U = \{(r\,,\,\theta)\;/\;r > 0\,,\,0 < \theta < \pi\}$
$F(r\,,\,\theta) = r\,\cos\theta\,,\,r\,\sin\theta$

Définition

F de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est **localement inversible** en $X \in \mathbb{R}^n$ s'il existe des ouverts U et V avec $X \in U$ et $F(X) \in V$ tel que F est inversible sur U.

Théorème

Soit F de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$.
On a équivalence entre :

(i) La matrice jacobienne $J_X(F)$ est inversible (c'est-à-dire $\det J_X(F) \neq 0$).

(ii) F est localement inversible en X.

Cours de LICENCE
VAR : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées
Deuxième partie : Calcul intégral

Chapitre 1 : Intégration des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

1 – Rappel : Intégration des fonctions d'une variable

Soit $f : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ bornée.

a) Cas où f est en escalier.
Il existe une partition $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ telle que f est constante sur chaque intervalle $]t_i\,,\,t_{i+1}[$ $(f(x) = C_i)$.
Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} C_i\,(t_{i+1} - t_i)$.

b) Si f est bornée on l'approche par des fonctions en escalier.

Définition
f est **intégrable** sur $[a\,,\,b]$ s'il existe un nombre unique I tel que pour toutes fonctions en escalier $u\,,\,v$ sur $[a\,,\,b]$ vérifiant $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$ on a :

$$\int_a^b u(x)\,dx \quad \leqslant \quad I \quad \leqslant \quad \int_a^b v(x)dx$$

et si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des fonctions en escalier u_ε et v_ε vérifiant :

$$u_\varepsilon(x) \quad \leqslant \quad f(x) \quad \leqslant \quad v_\varepsilon(x)$$

et

$$0 \quad \leqslant \quad \int_a^b v_\varepsilon(x)\,dx - \int_a^b u_\varepsilon(x)\,dx \quad < \quad \varepsilon$$

Notation : I s'appelle l'intégrale de f sur $[a\,,\,b]$ et se note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

2 – Intégration des fonctions de plusieurs variables

Soit $f : [a_1\,,\,b_1] \times [a_2\,,\,b_2] \times\ \ldots\ \times [a_n\,,\,b_n] \to \mathbb{R}$.
Ici on considère le cas $R = [a\,,\,b] \times [c\,,\,d] \subset \mathbb{R}^2$.

a) f est en escalier.
Il existe une partition de $[a\,,\,b] \times [c\,,\,d]$:
$a = s_0 < s_1 < s_2 <\ \ldots\ < s_m = b$
$c = t_0 < t_1 <\ \ldots\ < t_n = d$
telle que f est constante à l'intérieur de chaque rectangle $]s_i\,,\,s_{i+1}[\times]t_j\,,\,t_{j+1}[$ (où elle vaut C_{ij}).
On définit $\displaystyle\iint_R f(x\,,\,y)\,dx\,dy = \sum_{i\,,\,j} C_{ij}\,(s_{i+1} - s_i)\,(t_{j+1} - t_j)$.

b) f est bornée sur $R = [a\,,\,b] \times [c\,,\,d]$.
On approche f par des fonctions en escalier.

Définition
f est **intégrable** sur R s'il existe un nombre unique I tel que pour toutes fonctions en escalier $u(x\,,\,y)$ et $v(x\,,\,y)$, telles que $u(x\,,\,y) \leqslant f(x\,,\,y) \leqslant v(x\,,\,y)$, on a :

$$\iint_R u(x\,,\,y)\,dx\,dy \quad \leqslant \quad I \quad \leqslant \quad \iint_R v(x\,,\,y)\,dx\,dy$$

et si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions en escalier u_ε et v_ε telles que :

$$u_\varepsilon(x\,,\,y) \quad \leqslant \quad f(x\,,\,y) \quad \leqslant \quad v_\varepsilon(x\,,\,y)$$

et

$$0 \quad \leqslant \quad \int_R v_\varepsilon(x\,,\,y)\,dx\,dy - \int_R u_\varepsilon(x\,,\,y)\,dx\,dy \quad < \quad \varepsilon$$

Notation : I s'appelle l'intégrale de f sur R et se note $\displaystyle\iint_R f(x\,,\,y)\,dx\,dy$.

Proposition : Propriétés de l'intégrale double

1. Si f est continue sur R alors f est intégrable.
2. Si f est positive sur R alors $\displaystyle\iint_R f(x\,,\,y)\,dx\,dy$ est le volume sous le graphe de f au-dessus de R.
3. $\displaystyle\iint_R (\alpha f + \beta g)\,(x\,,\,y)\,dx\,dy = \alpha \iint_R f(x\,,\,y)\,dx\,dy + \beta \iint_R g(x\,,\,y)\,dx\,dy$.
4. Si $R = R_1 \cup R_2$ avec $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ alors :

$$\iint_R f(x\,,\,y)\,dx\,dy = \iint_{R_1} f(x\,,\,y)\,dx\,dy + \iint_{R_2} f(x\,,\,y)\,dx\,dy$$

Théorème
Si f est continue sur R alors $\displaystyle\iint_R f(x\,,\,y)\,dx\,dy$ existe.

3 – Calcul des intégrales doubles

Théorème de Fubini
Si f est continue sur $R = [a\,,\,b] \times [c\,,\,d]$ alors :

$$\iint_R f(x\,,\,y)\,dx\,dy \quad = \quad \int_a^b \left(\int_c^d f(x\,,\,y)\,dy \right) dx \quad = \quad \int_c^d \left(\int_a^b f(x\,,\,y)\,dx \right) dy$$

Exemple

(1) $\displaystyle\iint_R (x^2 + y^2)\,dx\,dy \qquad R = [0\,,\,1] \times [0\,,\,1]$

(2) $\displaystyle\iint_R (1 + x + y)\,dx\,dy \qquad R = [0\,,\,1] \times [0\,,\,1]$

Interprétation géométrique du théorème
Notion de volume sous une surface

4 – Intégration sur les régions bornées de $\mathbb{R}^2$

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est non rectangulaire.
On considère un rectangle R tel que $D \subset R$ et on définit $\overline{f}$ sur R avec :

$$\overline{f}(x\,,\,y) = \begin{cases} f(x\,,\,y) & \text{si } (x\,,\,y) \in D \\ 0 & \text{si } (x\,,\,y) \notin D \end{cases}$$

Définition
Avec les notations précédentes on pose, si cela a un sens :

$$\iint_D f(x\,,\,y)\,dx\,dy \quad = \quad \iint_R \overline{f}(x\,,\,y)\,dx\,dy$$

On peut se ramener à deux types de domaine D :

Type 1 : $D = \left\{ (x\,,\,y) \quad / \quad \begin{array}{c} a \leqslant x \leqslant b \\ g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x) \end{array} \right\}$ où g_1 et g_2 sont continues.

Type 2 : $D = \left\{ (x\,,\,y) \quad / \quad \begin{array}{c} c \leqslant y \leqslant d \\ h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y) \end{array} \right\}$.

Théorème de Fubini

a) Si f est continue sur D de type 1, alors f est intégrable et on a :

$$\iint_D f(x\,,\,y)\,dx\,dy \quad = \quad \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x\,,\,y)\,dy \right) dx$$

b) Si f est continue sur D de type 2, alors f est intégrable et on a :

$$\iint_D f(x\,,\,y)\,dx\,dy \quad = \quad \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x\,,\,y)\,dx \right) dy$$

Exemples

(1) $\displaystyle\iint_D (x+2y)\,dx\,dy$: D est la région entre les deux paraboles $y = 2x^2$ et $y = 1 + x^2$.

(2) $\displaystyle\iint_D e^{x^2}\,dx\,dy$ sur le triangle $D = \left\{ (x\,,\,y) \quad / \quad \begin{array}{c} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant x \end{array} \right\}$.

Définition
Si D est un domaine borné, on appelle **aire de** D : aire$(D) = \displaystyle\iint_D 1\,dx\,dy$.

5 – Intégrale double et changement de variables

Rappel à une variable :

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad \int_c^d f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

où g est bijection de $[c\,,\,d]$ sur $[a\,,\,b]$.

Proposition
Si $G(u\,,\,v) = (x(u\,,\,v)\,,\,y(u\,,\,v))$:

$$\iint_{G(S)} f(x\,,\,y)\,dx\,dy \quad = \quad \iint_S f(x(u\,,\,v)\,,\,y(u\,,\,v))\ |\det \mathrm{Jac}(G(u\,,\,v))|\ du\,dv$$

avec $\mathrm{Jac}(G(u\,,\,v)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$.

Cas des coordonnées polaires
$x = x(r\,,\,\theta) = r\cos\theta$
$y = y(r\,,\,\theta) = r\sin\theta$

$$J(G) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\,r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

d'où $\displaystyle\iint_{R=G(S)} f(x\,,\,y)\,dx\,dy \;=\; \iint_S f(r\cos\theta\,,\,r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta.$

Exemples

(1) Calcul de l'aire d'un disque.

(2) $\displaystyle\iint_D e^{(-\,x^2-y^2)}\,dx\,dy$ où D est le disque unité.

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\,x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,.$

(4) $\displaystyle\iint_R e^{(y-x)/y+x}\,dx\,dy$ où $R = \begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$ avec $x+y \leqslant 2$.

6 – Justification du théorème de changement de coordonnées

7 – Intégrales triples

$$\iiint_R f(x\,,\,y\,,\,z)\,dx\,dy\,dz$$

Exemples

Changement de variables en dimension 3.

Chapitre 2 : Champs de vecteurs et intégrales curvilignes

1 – Définition

Définition
Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert.
Un **champ de vecteurs** sur U est une application F de U dans $\mathbb{R}^n$ de classe C^1.
F associe à chaque point un vecteur.

Exemples

(1) $F(x\,,\,y) \;=\; (-\,y\,,\,x)$
(2) $F(x\,,\,y) \;=\; (1\,,\,0)$
(3) $F(x\,,\,y\,,\,z) \;=\; (x\,,\,y\,,\,z)$
(4) $F(X) = \dfrac{X}{\|X\|}$ si $X \neq 0$
(5) Si f est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, soit $F(x) = \bigtriangledown f(x)$.
Ce champ de vecteurs est appelé champ de gradients.

2 – Intégrale curviligne

Définition
Soient $r : [a\,,\,b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée de classe C^1 et F un champ de vecteurs défini sur l'image de r (qui est une courbe C).
Alors on pose :

$$\int_C F\,dr \;=\; \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t)\,dt$$

Cette quantité s'appelle **intégrale curviligne** de F sur C.

Exemples
$r(t) = (t\,,\,t^n)\ ,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$
$F(x\,,\,y) = (-\,y\,,\,x)$

Interprétation : notion de travail d'une force

Proposition
Les principales propriétés sont :

$$\int_C (aF_1 + bF_2)\,dr = a\int_C F_1\,dr + b\int_C F_2\,dr$$

Si C est paramétré dans un sens par r, dans l'autre par s, on a : $\displaystyle\int_C F\,dr = -\int_C F\,ds\,.$

Si $C = C_1 + C_2$ alors : $\displaystyle\int_C F\,dr = \int_{C_1} F\,dr + \int_{C_2} F\,dr\,.$

3 – Champs de gradient et indépendance de chemin

Définition
F champ de vecteurs est un **champ de gradient** s'il existe f de U dans $\mathbb{R}$ telle que $F = \bigtriangledown f$.

Exemple
$F(x\,,\,y) = (y\,,\,x)$

Théorème 1
Si F est un champ de gradient alors $\displaystyle\int_C F\,dr$ ne dépend que des extrémités de C.

Théorème 2
On a équivalence entre :

- F est un champ de gradient.
- $\displaystyle\int_C F\,dr$ ne dépend que des extrémités de C et ceci pour tout chemin de C.

Proposition
Si $F = (F_1\,,\,F_2\,,\,\ldots\,,\,F_n)$ est un champ de gradient alors :

$$\forall i\,,\,\forall j \quad , \quad \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

Théorème 3
Soit F un champ de vecteurs sur U.
Si U est un ouvert étoilé alors F est un champ de gradient si et seulement si $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial F_j}{\partial x_i}$ pour tout i et tout j.

Chapitre 3 : Théorème de Green-Riemann

Soit $S \subset \mathbb{R}^2$ un domaine compact délimité par une courbe fermée, simple et C^1 par morceaux.
On oriente $C = \partial S$ en disant que le sens direct est celui qui laisse S à gauche.

Théorème (de Green-Riemann)
Soient S un domaine compact, $C = \partial S$ son bord orienté positivement.
Si $F(x\,,\,y) = (f_1(x\,,\,y)\,,\,f_2(x\,,\,y))$ alors $\displaystyle\int_C F\,dr = \iint_S \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx\,dy\,.$

Notation
Voici une autre façon, équivalente, d'énoncer la conclusion du théorème de Green-Riemann :
Si $F = (P\,,\,Q)$: $\displaystyle\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy\,.$
En plus, au lieu de $\displaystyle\int_C$ on écrit parfois $\displaystyle\oint_C$ pour rappeler que le chemin C est une boucle.

Exemples

Corollaire
Aire $S = \displaystyle\int_C x\,dy = \frac{1}{2}\int -y\,dx + x\,dy\,.$

Application de Green-Riemann
Si $G(u\,,\,v) = (x(u\,,\,v)\,,\,y(u\,,\,v))$ est un changement de variables d'un domaine R à un domaine $G(R)$ alors :

$$\iint_{G(R)} dx\,dy \quad = \quad \iint_R |\det J(G)|\,du\,dv$$

Chapitre 4 : Intégrales de surface

1 – Surface de $\mathbb{R}^3$

On peut décrire une surface de $\mathbb{R}^3$ de trois manières :

a) Surface de niveau
$S = \{(x\,,\,y\,,\,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; f(x\,,\,y\,,\,z) = 0\}$ où f est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
Exemple : $f(x\,,\,y\,,\,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.

b) Graphe d'une fonction $z = f(x\,,\,y)$
Exemple : $z = x^2 + y^2$.

c) Surface paramétrée
Soit $r : T \to \mathbb{R}^2$ où $T \subset \mathbb{R}^2$: $r(u\,,\,v) = \{x(u\,,\,v)\,,\,y(u\,,\,v)\,,\,z(u\,,\,v)\}$.
Exemple : sphère, cône en coordonnées sphériques ou cylindriques.

2 – Aire de $S = r(T)$

On a Aire $(T) = \displaystyle\iint 1\,du\,dv$.

Définition
On pose : Aire $(S) = \displaystyle\iint_T \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} \right\| du\,dv$.

1) Si r est injective alors $S = r(T)$ est une surface paramétrée **simple**.
2) Si $\left\| \dfrac{\partial r}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial r}{\partial v} \right\| \neq 0$ sur T, alors $S = r(T)$ est dite **lisse** (on suppose r de classe C^1).

Cas particulier : S est définie par $z = f(x\,,\,y)$ alors Aire$(S) = \displaystyle\iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\,dy.$

Exemple
Aire du paraboloïde
Aire de la sphère

3 – Intégrale de surface

Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est bornée sur $S = r(T)$. Alors :

Définition
On appelle **intégrale de surface** $\displaystyle\iint_{r(T)} f\,dS \;=\; \iint_T f(r(u\,,\,v)) \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v} \right\| du\,dv.$

Exemple
Calcul d'aire
Recherche de centre de gravité

4 – Changement de paramétrisation

Proposition
L'intégrale de surface est inchangée quand on change de paramétrisation.

5 – Champs de vecteurs

Soient $F(x\,,\,y\,,\,z) = (P(x\,,\,y\,,\,z)\,,\,Q(x\,,\,y\,,\,z)\,,\,R(x\,,\,y\,,\,z))$ défini sur $S = r(T)$.
Soit $N = \dfrac{\partial r}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial r}{\partial v}$ la normale à S, et $n = \dfrac{N}{\|N\|}$ la normale unitaire.

Définition
On appelle **flux de** F **à travers** S l'intégrale $\displaystyle\iint F \cdot n\; dS$.

Proposition
On a $\displaystyle\iint_S F \cdot n\; dS = \iint_T F(r(u\,,\,v)) \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial u} \wedge \frac{\partial r}{\partial v}\right) du\, dv$.

Exemple
Calculer le flux de $(y\,,\,-x\,,\,1)$ à travers la dernière sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2\,,\; z \geqslant 0$.

Notation : le flux se note $\displaystyle\iint P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy\,.$

6 – Théorème de Stokes

Définition
Soit $F = (P(x\,,\,y\,,\,z)\,,\,Q(x\,,\,y\,,\,z)\,,\,R(x\,,\,y\,,\,z))$ un champ de vecteurs de classe C^1 dans $\mathbb{R}^3$. Le **rotationnel** de F est
$\mathrm{rot}(F) = \left(\dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}\,,\; \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x}\,,\; \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)$.
Formellement, avec la notation $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, on peut définir $\mathrm{rot}(F) = \nabla \wedge F$.

Théorème
Soit F un champ de vecteurs de classe C^1, défini sur un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^3$ qui contient S. Supposons que le bord de S est une courbe C. Alors on a :
$\displaystyle\int_S (\mathrm{rot}\, F) \cdot n\; dS = \int_C F\, d\alpha\,.$

Remarque
Dans le cas où $S \subset \mathbb{R}^2$, on retrouve Green-Riemann.

Exemple
Vérification de Stokes avec S paraboloïde $z = 4x^2 - y^2\,,\; z \geqslant 0$: $F(x\,,\,y\,,\,z) = (z - y\,,\,z + x\,,\,-x - y)$.

7 – Interprétation physique - Notion de flux conservatif

8 – Démonstration du théorème de Stokes dans le cas où S est donnée par $z = f(x\,,\,y)$

9 – Divergence - Théorème de Gauss Ostrogradsky

Définition
Soit $F = (F_1, F_2, F_3)$ un champ de vecteurs de classe C^1 dans $\mathbb{R}^3$. La **divergence** de F est
$\text{div}(F) = \dfrac{\partial F_1}{\partial x} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y} + \dfrac{\partial F_3}{\partial z}$.
Formellement, on peut écrire $\text{div}(F) = \nabla \cdot F$.

Théorème
Soit $V \subset \mathbb{R}^3$ un volume délimité par une surface S fermée et orientée.
Soient n le vecteur unitaire normal vers l'extérieur et F un champ de vecteurs de classe C^1.
Alors :

$$\iiint_V \text{div}(F)\, dx\, dy\, dz \quad = \quad \iint_S F \cdot n\, dS$$

Exemple
Calcul du flux de $F(x\,,\,y\,,\,z) = (x\,,\,0\,,\,0)$ à travers la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.