Université de Rennes 1 Année 2009–2010
UFR Mathématiques
Module VAR

Contrôle continu 3
24 novembre 2009 — Durée : 40 minutes

Aucun appareil électronique (calculatrice, téléphone portable...) et aucun document est autorisé. Toutes les réponses devront être justifiées, y compris dans les questions vrai/faux.

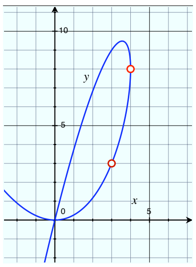
Exercice 1 Nous considérons la fonction

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto x^3 + y^2 - 4xy$$

et la courbe de niveau $\{(x,y)\,|\,f(x,y) = 0\}$. On peut vérifier que les points $(3,3)$ et $(4,8)$ appartiennent à cette courbe de niveau.

(a) Pour lesquels de ces deux points peut-on, selon le cours, écrire un voisinage de la courbe de niveau comme fonction implicite $y = \phi(x)$? Solution : $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - 4x$, donc $\frac{\partial f}{\partial y}(3,3) = -6 \neq 0$, donc une écriture comme fonction implicite existe bien dans un voisinage de $(3,3)$. En revanche, $\frac{\partial f}{\partial y}(4,8) = 0$, donc le théorème du cours ne promet pas de fonction implicite (et en fait il n'y en a pas).

(b) Pour les points $(x,y) = (3,3)$ ou $(4,8)$ où la réponse en (a) est positive, calculer la dérivée $\phi'(x)$. Solution : Pour la fonction ϕ avec $\phi(3) = 3$, on a $\phi'(3) = -\frac{\partial f}{\partial x}/\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-3x^2+4y}{2y-4x} = \frac{-15}{-6} = \frac{5}{2}$



Exercice 2 **(a)** Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une fonction. Pour un point $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, qu'est-ce que la phrase "La fonction f est localement inversible en $\vec{x}$" veut dire ? (Donnez la *définition* – je ne m'intéresse pas pour le critère avec la Jacobienne !) Solution : Il existe un sous-ensemble $U \subset \mathbb{R}^2$ avec $\vec{x} \in U$ tel que la réstriction $f\colon U \to f(U)$ est bijective (possède une fonction inverse).

(b) Regardons la fonction

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\quad \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cdot\cos(\theta) \\ r\cdot\sin(\theta) \\ z \end{pmatrix}$$

Où cette fonction est-elle localement inversible ? Solution : la Jacobienne est $Jac_f(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\cdot\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r\cdot\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et son déterminant est $r\cdot(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)) = r$. La fonction est localement inversible partout, sauf là où ce déterminant s'annulle, c.à.d. inversible en (r,θ,z) si et seulement si $r \neq 0$.

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ **(a)** Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Déterminer les bornes d'intégration pour que l'égalité suivante soit vraie

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos(x)} f(x,y)\ dy\ dx = \int_{??}^{??} \int_{??}^{??} f(x,y)\ dx\ dy$$

Solution : $= \int_0^1 \int_0^{\arccos(y)} f(x,y)\ dx\ dy$

(b) Soit $R = [0,2]\times[0,1]$. Calculer

$$\iint_R xy \ \ dx\ dy$$

Solution : $= \int_0^1 [\frac{1}{2}x^2y]_{x=0}^{x=2}\ dy = \int_0^1 2y\ dy = 1$