Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
Module VAR

Année 2009–2010

Contrôle continu 2
3 novembre 2009 — Durée : 40 minutes

Aucun appareil électronique (calculatrice, téléphone portable...) et aucun document est autorisé. Toutes les réponses devront être justifiées, y compris dans les questions vrai/faux.

Exercice 1 **(a)** Le sous-ensemble

$$A = \{\left(\begin{smallmatrix} x\cdot y \\ \sin(x)\end{smallmatrix}\right) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1 \;,\; -1 \leqslant y \leqslant 1\}$$

de $\mathbb{R}^2$ est compact – vrai ou faux ? Vrai – le carré $\{(x,y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1 \;,\; -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ est compact, et son image par l'application continue $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x\cdot y, \sin(x))$ est donc compacte d'après un théorème du cours (Théorème 5.5 du cours).

(b) Tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est ouvert ou fermé – vrai ou faux ? Faux – par exemple, pour $n = 1$, le segment $[0,1[$ est ni ouvert, ni fermé. Attention, dire qu'il existe des sous-ensembles qui sont ouverts *et* fermés est correct, mais ne prouve rien par rapport à la question.

(c) Le sous-ensemble

$$A = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right) \mid 0 < y < x^2\}$$

de $\mathbb{R}^2$ est ouvert – vrai ou faux ? Vrai – pour les deux applications continues $f\colon (x,y) \mapsto y$ et $g\colon (x,y) \mapsto x^2 - y$ c'est égal au sous-ensemble $f^{-1}(]0,+\infty[) \cap g^{-1}(]0,+\infty[)$.

(d) La fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right) \mapsto e^x - e^{-y}$ est harmonique – vrai ou faux ? Faux, car $\nabla^2 f(x,y) = e^x - e^{-y} \not\equiv 0$.

(e) Écrire les noms des lettres grecs suivants : $\lambda, \gamma, \zeta, \eta, \psi, \mu$. (Explication : par exemple, pour la lettre δ, la réponse correcte serait “delta”.) lambda, gamma, zeta, eta, psi, mu

Exercice 2 Dans tout cet exercice, on considère la fonction

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \;,\; \left(\begin{smallmatrix} x \\ y\end{smallmatrix}\right) \mapsto x^3 - y^3 + 3xy$$

(a) Dans quelle direction f s'accroît-elle le plus vite au point $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0\end{smallmatrix}\right)$? Le gradient de f est donné par $\nabla f(x,y) = (3x^2 + 3y \;,\; -3y^2 + 3x)$. En particulier, $\nabla f(2,0) = (12,6)$. Donc f s'accroît le plus vite dans la direction du vecteur $(12,6)$ (ou n'importe quel multiple de ce vecteur, par exemple $(2,1)$).

(b) Donner l'équation de la droite tangente à la courbe de niveau au point $\binom{2}{0}$. (Remarque : il s'agit de la courbe de niveau $\{\binom{x}{y} \mid f(\binom{x}{y}) = 8\}$.) C'est la droite donnée par l'équation $\binom{x-2}{y-0} \cdot \binom{12}{6} = 0$, ou $2x + y = 4$.

(c) Regardons le chemin $\vec{\gamma}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \binom{1+t+\cos(t)}{\sin(t)}$. Calculer la dérivée de $f \circ \vec{\gamma}$ en $t = 0$. On a $\gamma(0) = \binom{2}{0}$ et $\vec{\gamma}'(0) = \binom{1}{1}$, donc $(f \circ \vec{\gamma})'(0) = \nabla f(\binom{2}{0}) \cdot \vec{\gamma}'(0) = \binom{12}{6} \cdot \binom{1}{1} = 18$.

(d) Calculer la meilleure approximation de f par une fonction affine (ou la formule de Taylor au degré 1) autour de $\binom{2}{0}$. Si l'on note g cette fonction affine, alors $g(\binom{2+h_1}{h_2}) = f(\binom{2}{0}) + \nabla f(\binom{2}{0}) \cdot \binom{h_1}{h_2} = 8 + 12h_1 + 6h_2$.

(e) Calculer les points critiques de f. Pour chacun déterminer sa nature (max. local, min. local ou point de selle). On a $\nabla f(\binom{x}{y}) = \binom{0}{0}$ ssi $\binom{x}{y} = \binom{0}{0}$ ou $\binom{x}{y} = \binom{1}{-1}$. Pour connaitre leur nature, on calcule la Hessienne $H_f(\binom{x}{y}) = \begin{pmatrix} 6x & 3 \\ 3 & -6y \end{pmatrix}$, et son déterminant est $\Delta = -36xy - 9$. En $\binom{x}{y} = \binom{0}{0}$ on a $\Delta = -9$, donc il s'agit d'un point de selle. En $\binom{x}{y} = \binom{1}{-1}$ on a $\Delta = 27$, et en plus $6x > 0$, donc on a un minimum local.

(f) Calculer la meilleure approximation de f par une fonction quadratique (ou la formule de Taylor au degré 2) autour de $\binom{2}{0}$. On calcule la Hessienne : $H_f(\binom{2}{0}) = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Donc, si la fonction quadratique est notée g, alors

$$g(\begin{pmatrix} 2+h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}) = 8 + 12h_1 + 6h_2 + \frac{1}{2}(h_1\ h_2) \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 8 + 12h_1 + 6h_2 + \frac{12}{2}h_1^2 + \frac{6}{2}h_1h_2$$

Donc la réponse est $g(\binom{2+h_1}{h_2}) = 8 + 12h_1 + 6h_2 + 6h_1^2 + 3h_1h_2$