Université de Rennes 1 Année 2009–2010
UFR Mathématiques
Module VAR

Contrôle continu 1
29 septembre 2009 — Durée : 40 minutes

$\boxed{\textbf{Exercice 1}}$ On regarde la courbe dans le plan $\vec{\gamma}(t) = \binom{t \cdot \cos(t)}{t \cdot \sin(t)}$.

(a) Dessiner une esquisse de la courbe $\vec{\gamma}$.
Rép C'est une spirale qui s'éloigne de l'origine à vitesse uniforme – il était important de ne pas dessiner une spirale logarithmique !

(b) Calculer la longueur d'arc $\sigma(T)$ de cette courbe entre $t = 0$ et $t = T$. Indication : vous pouvez utiliser sans démonstration le fait que

$$\int \sqrt{1+t^2}\ dt = \tfrac{1}{2}\left(t \cdot \sqrt{1+t^2} + \ln(t + \sqrt{1+t^2})\right)$$

Rép On calule $\vec{\gamma}' = \binom{\cos(t) - t \cdot \sin(t)}{\sin(t) + t \cdot \cos(t)}$, et $||\vec{\gamma}'||^2 = \vec{\gamma}' \cdot \vec{\gamma}' = 1 + t^2$. Donc le segment entre $t = 0$ et $t = T$ est de longueur

$$\int_0^T ||\vec{\gamma}'||\ dt = \tfrac{1}{2}\left(t \cdot \sqrt{1+t^2} + \ln(t + \sqrt{1+t^2})\right)\Big|_{t=0}^{t=T} = \tfrac{1}{2}\left(T \cdot \sqrt{1+T^2} + \ln(T + \sqrt{1+T^2})\right)$$

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ Soit $\vec{\gamma}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée unitaire dans $\mathbb{R}^n$.

(a) Donner la définition de la *courbure* de $\vec{\gamma}$. (Pas de justification demandée.) **Rép** $||\gamma''(t)||$

(b) Démontrer que les vecteurs $\vec{\gamma}'(t)$ et $\vec{\gamma}''(t)$ sont orthogonaux.
Rép Comme la courbe est unitaire, on a $\vec{\gamma}'(t) \cdot \vec{\gamma}'(t) = 1$ pour tout t. En dérivant par rapport à t les deux côtés de l'équation on obtient $\vec{\gamma}'(t) \cdot \vec{\gamma}''(t) + \vec{\gamma}''(t) \cdot \vec{\gamma}'(t) = 0$ et donc $\vec{\gamma}'(t) \cdot \vec{\gamma}''(t) = 0$. Ceci est la définition d'être orthogonal.

(c) En cours on a étudié, pour toute courbe paramétrée $\vec{\gamma}$, la quantité

$$p(t) = \frac{||\vec{\gamma}'(t) \wedge \vec{\gamma}''(t)||}{||\vec{\gamma}'(t)||^3}$$

Si $\vec{\gamma}$ est unitaire, démontrer que $p(t)$ coincide avec la courbure $\rho(t)$.
Rép Comme la courbe est unitaire, le dénominateur $||\vec{\gamma}'(t)||^3$ est égal à 1. Pour le numérateur, on a

$$||\vec{\gamma}'(t) \wedge \vec{\gamma}''(t)|| = ||\vec{\gamma}'(t)|| \cdot ||\vec{\gamma}''(t)|| \cdot \sin(\theta) = 1 \cdot ||\vec{\gamma}''(t)|| \cdot 1$$

où l'angle θ entre les deux vecteurs est égal à 90^o par (b).

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ (a) Calculer l'angle entre les vecteurs $(1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0)$ et $(1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1)$ de $\mathbb{R}^4$.
Rép $\mathrm{Arccos}(\frac{3}{\sqrt{3}\sqrt{4}}) = \mathrm{Arccos}(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 30^o$**.**

(b) Dessiner quelques courbes de niveau de la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\binom{x}{y} \mapsto x - y^2$.
Rép La courbe de niveau 0 est une parabole dans le plan, tourné par 90^o dans le sens des aiguilles de la montre. Les autres courbes de niveau sont des translatés dans la direction horizontale de cette parabole.

(c) Le sous-ensemble $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{\frac{1}{n}\}$ de $\mathbb{R}$, est-il fermé ?
Rép Non, son complémentaire n'est pas ouvert, car le point 0 n'appartien pas à A, mais tout voisinage du point 0 contient des éléments de A.

(d) Le sous-ensemble $A = \left\{\binom{x}{y} \mid x > 0, y > 0\right\}$ de $\mathbb{R}^2$, est-il ouvert ?

Rép Oui ! En effet, A est l'intersection de $B = \left\{\binom{x}{y} \mid x > 0\right\}$ et de $C = \left\{\binom{x}{y} \mid y > 0\right\}$. Il suffit donc de démontrer que B et C sont ouverts. On fera la démonstration pour B, celle pour C est semblable : si $\vec{b} = \binom{x}{y}$ appartient à B (donc $x > 0$), alors toute la boule de rayon $r = x/2$ autour de $\vec{b}$ appartient aussi à B. – Il y a d'autres arguments possibles !