IUT GEA, Rennes I
TD Mathématiques
2009–2010

Feuille d'exercices no 3

Exercice 1 Calculer les dérivées des fonctions suivantes et trouver les maxima et minima (si elles existent).

(a)	$8x^{3/4}$	(b)	$e^{\sqrt{x}}$	(c)	$e^x \cdot \sqrt{x}$
(d)	$\dfrac{3x-2}{2x-3}$	(e)	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\frac{-x^2}{2})$	(f)	$\ln(\ln(x))$
(g)*	$3^{(3^x)}$	(h)	$x^{\frac{1}{x}}$	(i)	$\frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$

Solution: (a) $y' = \frac{6}{\sqrt[4]{x}}$ (b) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$ (c) $y' = e^x(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}})$ (d) $y' = \frac{5}{(2x-3)^2}$ (e) $y' = \frac{-x}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$ (f) $y' = \frac{1}{x \cdot \ln(x)}$ (g) $y' = 3^{x+3^x} \cdot (\ln(3))^2$ - définie pour $x > 0$ (h) $y' = x^{(\frac{1}{x}-2)} \cdot (1 - \ln(x))$ - définie pour $x > 0$, max en $x = e$, $\lim_{x \to 0+} = 0$, $\lim_{x \to \infty} = 1$ (i) $y' = \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}}(\frac{1}{x} - 1)$, définie pour $x \neq 0$, $\lim_{x \to 0+} = 0$, $\lim_{x \to \infty} = 0$

Exercice 2 (cet exercice a été posé pendant le cours) Supposons que la fonction Demande est $f(x) = 400 - 2x$, où x est la quantité produite. Calculer le revenu total et le revenu marginal en fonction de x. Dessiner les graphes des deux fonctions et les interpréter.

Solution: $RT(x) = x \cdot f(x) = 400x - 2x^2$, une parabole avec racines 0 et 200 et maximum $f(100) = 20000$. $RM(x) = 400 - 4x$, ce qui a une racine en $x = 100$. Donc si l'on met plus de 100 appareils sur le marché, le marché devient tellement saturé que l'opération devient en total moins rentable. Audela de 200 unités, on fait une perte.

Exercice 3 (cet exercice a été posé pendant le cours) Donnez des exemples d'articles pour lesquels, à votre avis, l'élasticité de la demande par rapport au prix est assez importante, et d'autres pour lesquels l'élasticité est plutôt proche de 0.

Solution: Je m'imagine que l'elasticite est importante pour les articles de luxe dont on peut se passer (vetements de marque, gadgets electroniques etc) et relativement petite pour des articles de base: pain, vetements simples, etc

Exercice 4 La fonction de Demande d'un certain bien est

$$f(x) = 18 - 5x$$

et le coût total de production pour le fabricant est

$$CT(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1 \quad \text{(Est-ce réaliste?)}$$

Comment faut-il choisir la quantité produite x pour maximiser le profit ? (Indication : Le profit total PT se calcule $PT(x) = RT(x) - CT(x)$, où le revenu total est donné par $RT(x) = x \cdot f(x)$ – ceci a été vu en cours.)

Solution: $PT(x) = -x^3 - 2x^2 + 15x - 1$. Sa dérivée, c.a.d. le profit marginal, s'annulle en $x = -3$ et $x = 5/3$. La première n'a pas de sens car négative et la deuxième est bien un maximum. Le profit est alors $13,81$. REMARQUE: expliquer aussi la facon suivante de le voir: on regarde revenu marginal et le cout marginal, et on regarde où ils sont égaux (leurs graphes se croisent). D'ailleurs, non, ce n'est pas réaliste, on attend plutot que le cout marginal soit decroissant!!

Exercice 5 Supposons que, pour un certain produit, le nombre d'exemplaires vendus dépend du prix p par la fonction

$$f(p) = 20000 \cdot \sqrt{100 - p}$$

(a) Calculer l'élasticité $\mathcal{E}_f$ en fonction de p.

(b) Si le prix du produit est initialement fixé à 50€, quelle serait, en pourcentage, la diminution des ventes si le prix était augmenté de 2% ?

Exercice 6 (a) (cet exercice a été posé pendant le cours) Déterminez le tableau de variation de $f\colon [-2{,}5,\ 1{,}5] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{4}(x^3 + 3x^2)$. Trouvez également le minimum et le maximum (global) de cette fonction.

(b) Déterminez le tableau de variation de la fonction $f\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$. Indication : nous avons déjà calculé que la dérivée de f est $f'(x) = (1 - \ln(x)) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot x^{\frac{1}{x}}$. Attention vous devrez en particulier calculer les limites de f quand $x \to 0^+$ et quand $x \to +\infty$!

Exercice 7 Déterminez les limites suivantes

(a) $\lim_{n\to+\infty} u_n$, où u_n est la suite $u_n = \exp\left(\frac{3n^3-5n^2+9}{-2n^2+3}\right)$

(b) $\lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{x^3-5x+7}{-x^4-4}\right)$ **(c)** $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x^3+7+\frac{2}{x^2}}$

(d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2}\cdot\sqrt{x^4+2x^3-1}$ **(e)** $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x}$

(f) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, où $f(x) = \frac{1}{x}\cdot\exp(\frac{-1}{x})$

Exercice 8 Soit u_n la suite définie par récurrence : $u_0 = 1$ et $u_n = 3u_{n-1}+2$. Trouvez une formule pour u_n en fonction de n.

Exercice 9 Vous prenez un crédit de 7500€ avez un taux de 8%, à remboursements *annuels*. Vous gagnez 1200€ par mois et la banque exige un endettement inférieur à 30%.

(a) Quel est la durée minimale du crédit possible, et quel sera le coût total du crédit dans ce cas ?

(b) Quel est le montant des remboursements qu'il faut choisir pour rembourser pendant exactement 5 ans ?