Master 2 Mathématiques
Rennes 1, 2009–2010
Classification de Nielsen Thurston

Feuille d'exercices

Relèvement et paraboliques

Exercice 1 : Relèvement de courbes fermées au revêtement universel

Soit π: $(Y, y) \to (X, x)$ un revêtement entre espaces topologiques avec X et Y connexes et localement connexes par arcs, et Y simplement connexe.

En ce cas, on sait que le groupe fondamental $\pi(X, x)$ s'identifie au groupe des automorphismes $Aut(\pi)$ du revêtement π. On note

$$\begin{array}{rcl} \pi_1(X,x) & \to & \mathrm{Aut}(\pi) \subset \mathrm{Homeo}(Y) \\ \gamma & \mapsto & \gamma_\# \end{array}$$

cet isomorphisme.

Soit α_0: $[0,1] \to X$ un lacet basé en x. Notons $\widehat{\alpha}_0$: $\mathbb{R} \to X$ l'application qui à $t \in \mathbb{R}$ associe $\alpha_0([t])$, où $[t]$ = partie fractionnaire de t. Soit α la classe d'homotopie $\in \pi_1(X, x)$ déterminée par α_0.

1.A Montrer que $\widehat{\alpha}_0$ est continue.

1.B Montrer que $\widehat{\alpha}_0$ se relève de manière unique en

$$\widetilde{\alpha}_0\colon \mathbb{R} \to Y$$

avec $\pi \circ \widetilde{\alpha}_0 = \widehat{\alpha}_0$ et $\widetilde{\alpha}_0(0) = y$.

1.C Montrer que

$$\widetilde{\alpha}_0(t+1) = \alpha_\#(\widetilde{\alpha}_0(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Exercice 2 : Soit X une variété compacte. Soit δ une distance sur X (qui induit la topologie sur X); en particulier,

$$\begin{array}{rcl} \delta\colon X \times X & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \delta(x, y) \end{array}$$

est une application continue.

Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout point x de X, tout lacet α: $[0, 1] \to X$ basé en x de diamètre inférieur ou égal à ϵ est homotope au lacet constant e_x.

Exercice 3 : Soit (X, δ) un espace métrique, où δ désigne la distance sur X. Soit Γ un sous-groupe du groupe des isométries de X. On suppose que

$$\exists \epsilon > 0 \ \ \forall x \in X \ \ \forall \gamma \in \Gamma, \quad \delta(\gamma(x), x) > \epsilon$$

Soit $Y = X/\Gamma$ l'espace quotient pour la relation d'équivalence

$$x \sim x' \quad \Leftrightarrow \quad \exists \gamma \in \Gamma, \ \ \gamma(x) = x'$$

3.A Montrer que la fonction $\delta_Y \colon Y \times Y \to X$, définie par

$$\delta_Y(y, y') = \inf\{\delta(x, x') \mid x \in y, x' \in y'\}$$

est une distance pour Y.

3.B Soit $\pi \colon X \to Y = X/\Gamma$ la projection canonique. Montrer que si Z est une partie de X de diamètre inférieur à $\frac{\epsilon}{3}$, alors $\pi|_Z \colon Z \to \pi(Z)$ est une isométrie.

Exercice 4 : Soit X la surface orientable compacte sans bord de genre g avec $g \geqslant 2$. On a vu en cours qu'il existe au moins un revêtement $\pi \colon \mathbb{D} \to X$ pour lequel $\mathrm{Aut}(\pi)$ est inclus dans $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{D})$. Soit $\pi \colon \mathbb{D} \to X$ un tel revêtement.

Le but de cet exercice est de montrer que tout élément de $\mathrm{Aut}(\pi)\backslash \mathrm{Id}_{\mathbb{D}}$ est une isométrie de type hyperbolique.

Dans la suite, on munit $\mathbb{D}$ de sa métrique hyperbolique δ, et X de la métrique quotient δ_X (cf. exercice 3) et on utilise les notations de l'exercice 1.

4.A Montrer que $\mathrm{Aut}(\pi)\backslash \mathrm{Id}_{\mathbb{D}}$ ne contient pas d'isométrie de type elliptique.

4.B Supposons à partir de maintenant que $\mathrm{Aut}(\pi)\backslash \mathrm{Id}_{\mathbb{D}}$ contient une isométrie parabolique $\alpha_{\#}$, avec $\alpha_0 \in \pi_1(X, x)$. Montrer qu'il existe $\varphi \colon \mathbb{D} \to \mathbb{H}$, une isométrie du disque vers le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$, telle que

$$\varphi \circ \alpha_{\#} \circ \varphi^{-1}(z) = z + 1.$$

Dans la suite, on remplace

- $\pi \colon \mathbb{D} \to X$ par $\pi_0 = \pi \circ \varphi^{-1} \colon \mathbb{H} \to X$
- $\alpha_{\#}$ par $\alpha_{0\#} = \varphi \circ \alpha_{\#} \circ \varphi^{-1}$
- $\mathrm{Aut}(\pi)$ par $\mathrm{Aut}(\pi_0)$

4.C Soit $\alpha \colon [0, 1] \to X$ un lacet basé en x dont la classe d'homotopie est égale à α. Relevons α_0 en $\widetilde{\alpha}_0 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{D}$ comme dans l'exercice 1 :

$$\widetilde{\alpha}_0(t + 1) = \alpha_{0\#}(\widetilde{\alpha}_0(t))$$

Montrer que

$$\begin{array}{rcl} F\colon \mathbb{R}^+ \times [0,1] & \to & \mathbb{D} \\ (s,t) & \mapsto & is + \widetilde{\alpha}_0(t) \end{array}$$

vérifie

(1) $F(s,t+1) = \alpha_{0\#}(F(s,t)) \quad \forall s, \forall t.$

(2) la longueur (pour la métrique hyperbolique) de la courbe

$$[0,1] \ni t \mapsto F(s,t)$$

tend vers 0 lorsque s tend vers $+\infty$.

(3) $\pi_0 \circ F\colon \mathbb{R}^+ \times [0,1] \to X$ est une homotopie libre de lacets.

4.D Montrer en utilisant (4.C) et l'exercice 2 qu'il existe $s_0 > 0$ tel que

$$\pi_0 \circ F\colon\ [0, s_0] \times [0,1] \to X$$

réalise une homotopie de α vers un lacet $t \mapsto \pi_0(F(s_0,t))$ qui est homotope à un lacet constant. En déduire que la classe d'homotopie libre de α est triviale.

4.E En déduire que la classe d'homotopie de α à extrémité fixée est triviale, et conclure que $\mathrm{Aut}(\pi)$ ne contient pas d'élément parabolique.

Twists de Dehn

Soit M une surface orientée, et soient a, b, c des classes d'homotopie de courbes simples fermées dans M. Nous supposons que ces classes sont ni triviaux (courbes contractibles) ni contractibles vers un cusp. Rappellons la définition de l'élément D_a de $\mathcal{M}od(M)$, qui s'appelle le *twist de Dehn* sur a.

Pour l'anneau $A = \{r \cdot e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid 1 \leqslant r \leqslant 2\}$, regardons l'application

$$\begin{array}{rcl} D\colon A & \to & A \\ r \cdot e^{i\theta} & \mapsto & r \cdot e^{i(\theta + 2\pi r)} \end{array}$$

qui fixe le bord de l'anneau point par point. Ensuite, fixons un homéomorphisme φ entre un voisinage de la courbe a et l'anneau A. L'application D_a est, par définition, l'identité en dehors du voisinage de a, et elle est $\varphi^{-1} \circ D \circ \varphi$ sur le voisinage de a.

Exercice 5.A Si $i(b,c) = 0$, montrer que $i(D_a(b), c) = i(a,b) \cdot i(a,c)$. (Remarquez que ce résultat s'applique en particulier si $b = c$.)

5.B En déduire que les twists de Dehn sont des éléments nontriviaux de $\mathcal{M}od(M)$ – en fait, pour toute courbe b avec $a \cap b \neq \emptyset$ on a $D_a(b) \neq b$.

Avec un peu plus de travail on peut déduire de la question (a) un autre résultat classique que nous admettrons : si $a \neq b$ alors $D_a \neq D_b$.

5.C Pour tout $F \in \mathcal{M}od(M)$, montrer l'identité dans $\mathcal{M}od(M)$

$$FD_aF^{-1} = D_{F(a)}$$

5.D Pour $F \in \mathcal{M}od(M)$, montrer que

$$FD_a = D_aF \quad \Leftrightarrow \quad F(a) = a$$

5.E Commutation de twists de Dehn : montrer que

$$D_aD_b = D_bD_a \quad \Leftrightarrow \quad i(a,b) = 0$$

5.F Montrer les équivalences suivantes

$$D_aD_bD_a = D_bD_aD_b \quad \Leftrightarrow \quad D_a(b) = D_b^{-1}(a) \quad \Leftrightarrow \quad i(a,b) = 1$$

Remarque : l'implication "$\Rightarrow$" de la dernière équivalence est difficile.

Le tore

On note $\mathbb{T}^2$ le tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, et π: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ la projection canonique; l'image $\pi(\binom{x}{y})$ d'un point $\binom{x}{y}$ sera encore notée $\binom{x}{y}$. On rappele que le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ agit par transformations linéaires sur $\mathbb{R}^2$ en préservant le réseau $\mathbb{Z}^2$; si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, on note alors

$$\begin{array}{rcl} f_A\colon \mathbb{T}^2 & \to & \mathbb{T}^2 \\ \binom{x}{y} & \mapsto & A\binom{x}{y} = \binom{ax+by}{cx+dy} \end{array}$$

l'application obtenue par passage au quotient. Ceci détermine un morphisme de groupes

$$\begin{array}{rcl} SL_2(\mathbb{Z}) & \to & \mathrm{Homeo}(A) \\ A & \mapsto & f_A \end{array}$$

On rappelle enfine (cf. cours) que ceci détermine un isomorphisme de $SL_2(\mathbb{Z})$ vers le groupe modulaire $\mathcal{M}od(\mathbb{T}^2)$:

$\forall \varphi \in \mathcal{M}od(\mathbb{T}^2)$ $\exists!$ $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ tel que la classe d'isotopie de f_A soit égale à φ.

On notera

$$\begin{array}{rcl} SL_2(\mathbb{Z}) & \to & \mathcal{M}od(\mathbb{T}^2) \\ A & \mapsto & \varphi_A \end{array}$$

cet isomorphisme; donc, φ_A est la classe d'isotopie de f_A.

Exercice 6 Pour les choix suivants de matrices A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dire quels sont les éléments φ_A qui sont périodiques, réductibles, ou pseudo-Anosov.

Exercice 7 Soient a et b deux nombres réels avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Soit $L_{a,b} \subset \mathbb{R}^2$ la droite d'équation

$$ax + by = 0$$

7.A Montrer que $\pi(L_{a,b})$ est dense dans $\mathbb{T}^2$ si et seulement si $a \neq 0$ et $\frac{b}{a}$ est irrationnel.

7.B On suppose que a et b sont entiers et premiers entre eux. Montrer qu'il existe $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ tel que $A\binom{a}{b} = \binom{1}{0}$.

7.C Montrer que le nombre d'intersection géométrique entre deux courbes α et β est invariant par homéomorphisme :

$$\forall f \in \mathrm{Homeo}(\mathbb{T}^2),\ \forall \alpha, \beta \text{ courbes fermées}, \quad i(\alpha, \beta) = i(f(\alpha), f(\beta))$$

7.D Soient a et b deux entiers premiers entre eux. Montrer que l'intersection entre les courbes

$$\alpha_{1,0} = \pi(L_{1,0}) \quad \text{et} \quad \alpha_{a,b} = \pi(L_{a,b})$$

est égal à $|b|$:

$$i(\alpha_{1,0}, \alpha_{a,b}) = |b|.$$

7.E Déduire de 7.B, 7.C et 7.D que

$$\begin{array}{rcl} i(\alpha_{a,b}, \alpha_{a',b'}) & = & \left| \det \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix} \right| \\ & = & |ab' - a'b| \end{array}$$

pour toutes paires (a, b), (a', b') de nombres premiers entre eux.

Exercice 8 Soit $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ avec trace$(A) = \tau$ qui vérifie

$$|\tau| \geqslant 3$$

8.A Montrer que les valeurs propres de A sont de la forme λ, $\frac{1}{\lambda}$ avec $1 < |\lambda|$ et signe(λ) =signe(τ). Calculer λ et $\frac{1}{\lambda}$ en fonction de τ et montrer que λ et $\frac{1}{\lambda}$ sont toujours irrationnels.

8.B Donner deux formes linéaires $\xi^+ \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $\xi^+ \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que

(i) $\ker(\xi^+)$ est la droite propre de A de valeur propre λ.

(ii) $\ker(\xi^-)$ est la droite propre de A de valeur propre $\frac{1}{\lambda}$.

On note $\mathcal{F}^{+/-}$ le feuilletage constitué des droites parallèles à $\ker(\xi^{+/-})$.

8.C Soit $\alpha \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$. On note

$$\mu^+(\alpha) = \int_0^1 |\xi^+(\alpha'(t))|\ dt$$

Montrer que ceci détermine une mesure transverse au feuilletage $\mathcal{F}^+$ (il s'agit de montrer que cette mesure transverse est invariante par holonomie). Comment se comporte $\mu^+(\alpha)$ si on change α en $A \circ \alpha$?

8.D Montrer que $\mathcal{F}^+, \mathcal{F}^-$ et leurs mesures transverses μ^+ et μ^- passent au quotient en des feuilletages mesurés sur $\mathbb{T}^2$. Montrer que toutes les feuilles de $\mathcal{F}^+$ et $\mathcal{F}^-$ sont denses dans $\mathbb{T}^2$. Montrer enfin que f_A est de type pseudo-Anosov.

Exercice 9 On conserve les notations de l'exercice 7. On dit qu'un point $\binom{x}{y}$ de $\mathbb{T}^2$ est périodique pour f_A s'il existe un entier $m > 0$ tel que

$$f_A^m \tbinom{x}{y} = f_A \circ \ldots \circ f_A \tbinom{x}{y} = \tbinom{x}{y}.$$

Autrement dit, $\binom{x}{y}$ est périodique si il existe $m > 0$ tel que

$$A^m \tbinom{x}{y} = \tbinom{x}{y} \text{ modulo } (\mathbb{Z}^2)$$

9.A Montrer que si $\binom{x}{y} \in \mathbb{Q}^2/\mathbb{Z}^2$ alors $\binom{x}{y}$ est périodique.

9.B Montrer la réciproque (on résoudra $(A^m - \mathrm{Id})\binom{x}{y} \in \mathbb{Z}^2$).

9.C En déduire que les points périodiques de f_A sont denses.

9.D Soit L^+ la feuille de $\mathcal{F}^+$ (notation de l'exercice 8) qui contient $\binom{0}{0}$. Soit L^- la feuille de $\mathcal{F}^-$ qui contient $\binom{0}{0}$. Soit $\binom{x}{y}$ un point de $L^+ \cap L^-$.

(a) montrer qu'un tel point existe

(b) montrer que $\lim_{n\to+\infty} f^n\binom{x}{y} = \binom{0}{0} = \lim_{n\to-\infty} f^n\binom{x}{y}$.

9.E (difficile) Montrer qu'il existe $\binom{x}{y} \in \mathbb{T}^2$ tel que l'ensemble $\left(f_A^n\binom{x}{y}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans $\mathbb{T}^2$.