Bert Wiest
Université de Rennes 1
UFR Mathématiques et IRMAR

IUT GEA, 1re année, Cours de Mathématiques

1 Quelques notions de logique

1.1 Assertions, prédicats, quantificateurs

Définition 1.1 *Une* assertion *(ou* proposition*) est un énoncé qui a un sens, et qui est soit vrai (V), soit faux (F).*

Par convention, quand on écrit une assertion, on affirme qu'elle est vraie.

Exemple "2 est bleu" n'est pas une assertion (pas de sens). "2 est impair" est une assertion fausse. "2 est pair" est une assertion vraie.

Définition 1.2 *On appelle* prédicat *une assertion qui dépend d'un ou plusieurs paramètres.*

Exemple Soit $A(n)$ = "n est pair". Alors l'assertion $A(n)$ est vraie pour $n = 326$ est fausse pour $n = 877$.

Définition 1.3 *On utilise les notations suivantes :*

- $\forall$ *veut dire "pour tous" (ou : "quelque soit")*
- $\exists$ *veut dire "il existe au moins un(e)"*

Ces deux expressions s'appellent les quantificateurs.

Exemples Ici on va utiliser l'ensemble $H = \{$tous les êtres humains, vivants ou déjà morts$\}$.

- $\forall x \in \{6, 12, 18, 24, \ldots\},\ x$ est divisible par 3. (Ceci est vrai, tout nombre divisible par 6 est a fortiori divisible par 3.)
- $\exists x \in \{6, 12, 18, 24, \ldots\},\ x$ est divisible par 5. (Cette assertion est vraie, car 30 est en effet divisible par 5.)
- $\forall h \in H,\ h$ est mortel. (Ceci est une assertion vraie.)
- $\exists h \in H,\ h$ a le coeur a droite. (Pour autant que je sache, cette proposition est vraie, il s'agit d'une anomalie génétique très rare.)
- $\forall h \in H, \exists m \in H,\ m$ est la mère de h. (Ceci est un énoncé VRAI: tout le monde a une mère.)

- $\exists m \in H, \forall h \in H,\ m$ est la mère de h. (Cette proposition est FAUSSE - elle affirme qu'il existe une femme qui est la mère de tout le monde.)

Remarquez que les deux derniers assertions se ressemblent énormement (elles diffèrent juste par l'ordre des mots), néanmoins elles ont des significations très différentes, dont une évidente et l'autre absurde.

1.2 Connecteurs logiques

À partir de deux assertions A et B on peut construire des nouvelles assertions.

- $\neg A$ (lu "non-A"), la négation : "A est faux", ou "il n'est pas vrai que A".
- $A \wedge B$ (lu "A et B")
- $A \vee B$ (lu "A ou B")
- $A \Rightarrow B$ (lu "A implique B"), c.à.d. si A est vrai, alors B est vrai aussi.
- $A \Leftrightarrow B$ (lu "A est équivalent à B") veut dire que A est vrai si et seulement si B est vrai. On écrit parfois "ssi" pour "si et seulement si".

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
V	V	F	V	V^*	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	$V^\dagger$	F
F	F	V	F	F	V	V

Remarque (1), concernant le $*$ dans ce tableau : en mathématiques, le "ou" n'est pas exclusif. Si un mathématicien est au restaurant et prend le menu "avec fromage ou dessert", il le droit de prendre du fromage et du dessert.

(2), concernant le † dans le tableau : une impliquation est vraie si sa prémisse est fausse ! "Si 5 est pair, alors mon cochon sait voler" est un énoncé vrai.

(3) Impliquation logique n'est pas causalité ! L'énoncé "Si je ne prends pas mon parapluie, alors il ne pleut pas" est logiquement équivalent à l'énoncé "S'il pleut, alors je prends mon parapluie", mais il contredit notre intuition quotidienne : bien évidemment, c'est le temps qui détermine mon comportement, pas vice versa. (Pour voir pourquoi les deux phrases sont logiquement équivalentes, pensez à la phrase "Si je ne prends pas mon parapluie, c'est qu'il ne pleut pas".) Chacune des deux phrases est en fait la *contraposée* de l'autre – voir plus tard.

Proposition 1.4 On a les règles suivantes pour les connecteurs logiques (on utilisera le symbole "$\equiv$" pour noter l'équivalence logique) :

- $\neg(\neg A) \equiv A$ – donc "il serait faux de dire que je ne suis pas fauché" est équivalent à "Je suis fauché".

- $A \wedge B \equiv B \wedge A$. Par exemple "$x$ est divisible par 2 et par 3" est équivalent à "x est divisible par 3 et par 2."
- $A \vee B \equiv B \vee A$. Par exemple "x est divisible par 2 ou par 3" est équivalent à "x est divisible par 3 ou par 2."
- $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ et $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$. Ceci veut dire que le parenthésage est inutile entre les mêmes connecteurs.
- $(A \Rightarrow B) \equiv (B \vee \neg A)$. Par exemple "Si il pleut, alors je prends mon parapluie" est équivalent à "Je prends mon parapluie ou il ne pleut pas" (autrement dit, ce qui est impossible c'est que je vienne sans parapluie *et* qu'il pleuve).
- $(A \Rightarrow B) \equiv ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$. On dit que le deuxième énoncé est la *contraposée* du premier, et vice versa. Voir l'exemple en haut. **ATTENTION, ne pas confondre la contraposée d'une impliquation et sa négation !**
- $(A \Leftrightarrow B) \equiv ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$

On a aussi les règles suivantes pour trouver la négation d'une assertion :

- $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$. Par exemple, la négation de "Je prends du fromage et du dessert" est "Je ne prends pas de fromage ou je ne prends pas de dessert". Remarquez que cette dernière phrase laisse la possibilité que je ne prends ni fromage ni dessert.
- $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$. Par exemple, prenons l'énoncé "Clara est une soumise ou elle est une pute (elle tombe forcement dans une des deux catégories)". Sa négation est "Clara n'est pas soumise et elle n'est pas pute".
- $\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge (\neg B)$. Par exemple, la négagion de "S'il pleut, alors je viens en voiture" est "Il pleut et (neanmoins) je ne viens pas en voiture".
- $\neg(\forall x, A(x)) \equiv \exists x, \neg A(x)$. Par exemple, la négation de l'énoncé "Tout être humain est mortel" est "Il existe un être humain qui n'est pas mortel".
- $\neg(\exists x, A(x)) \equiv \forall x, \neg A(x)$. Par exemple, la négation de "Il existe un nombre divisible par 6 qui est divisible par 5" serait "Tout nombre divisible par 6 est non-divisible par 5" (ce qui est faux, le nombre 30 étant un contre-exemple).

Règle pour trouver la négation d'une assertions : remplacer tous les "ou" par des "et" et vice versa, remplacer tous les "pour tous" par des "il existe" et vice versa.

Exemple La négation de "Pour tout être humain h, il existe un autre être humain m tel que m est la mêre de h" est "Il existe un être humain h tel que tout être humain m n'est pas la mêre de h".

2 Notions d'analyse : fonctions

2.1 Quelques formules élémentaires

Rappel (Distributivité) Pour trois nombres $a, b, c \in \mathbb{R}$ on a :

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Exemple Pour obtenir le prix TTC à partir du prix HT on écrit

$$P_{\mathrm{TTC}} = P_{\mathrm{HT}} + P_{\mathrm{HT}} \cdot T_{\mathrm{TVA}} = P_{\mathrm{HT}}(1 + T_{\mathrm{TVA}})$$

Rappel En utilisant la distributivité, on peut montrer très facilement que

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)\cdot(a-b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

Attention En particulier, $|a+b| = \sqrt{(a+b)^2} = \sqrt{a^2 + 2ab + b^2} \neq \sqrt{a^2 + b^2}$!!!

2.2 Fonctions : propriétés et applications simples

Définition 2.1 *Une* fonction *(réelle) f associe à tout nombre réel x appartenant à un certain ensemble D_f (appelé l'*ensemble de définition *de la fonction f) un autre nombre réel, appelé la* valeur *de la fonction f en x, noté $f(x)$.*

Notation $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$.

Dans les exemples qui vont nous intéresser, D_f est en général un intervalle ou un intervalle privé d'un nombre fini de points.

On représente généralement une fonction f par son *graphe*, en plaçant un point d'ordonnée $f(x)$ au-dessus du point d'abscisse x.

Exemple (Voir Figure 1) Je fabrique des appareils électroniques. Je regarde deux fonctions : en fonction du nombre d'appareils produits (et vendus), (a) combien est-ce que je gagne (recette), supposant que tous les appareils sont vendus à un certain prix fixe ? (b) combien d'argent dois-je dépenser pour la fabrication ?

Dans cet exemple, la fonction recette croît linéairement avec la quantité. La fonction dépense est typiquement plus compliquée. J'ai besoin d'un investissement initial pour commencer à fabriquer, mais le plus important le nombre d'appareils vendus, le plus bas le coût de fabrication par appareil.

Définition 2.2 *On dit de feux fonctions f et g qu'elles sont* réciproques *si $\forall x \in D_f,\ g(f(x)) = x$ et $\forall y \in D_g,\ f(g(y)) = y$. Leurs graphes sont alors symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite $y = x$.*

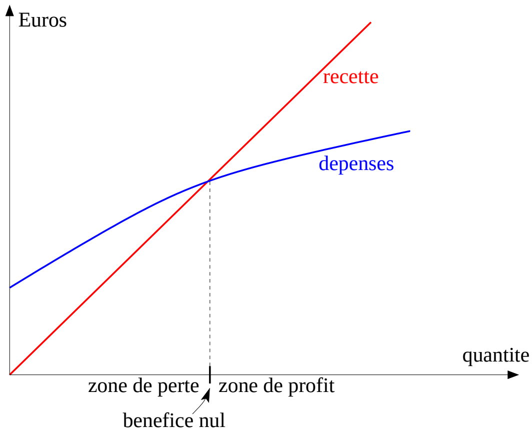


Figure 1: Exemple de deux fonctions “recette” et “dépenses”

Exemple 1 Regardons la fonction $y = f(x) = 3x - 5$; nous avons donc une écriture de y exprimé en fonction de x. “Trouver la fonction réciproque de f” veut tout simplement dire : exprimer x en fonction de y. Dans notre exemple c'est facile, $x = \frac{y+5}{3}$. Donc la fonction réciproque de f est $g(y) = \frac{y+5}{3}$.

Exemple 2 (voir Figure 2) Supposons que la fonction *dépenses* est de la forme $f(x) = 10 \cdot \sqrt{x+100}$, où les dépenses (le coût de production) est en Euros et x est le nombre d'appareils.

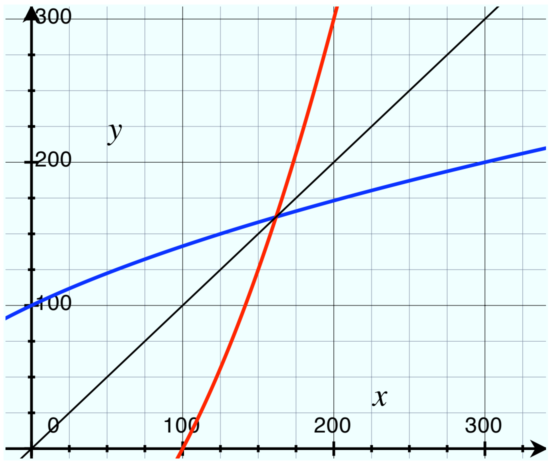


Figure 2: Exemple de la fonction “dépenses” f (bleue) et sa fonction réciproque g (rouge). En noir, l'axe de symétrie, le graphe de la fonction $y = x$.

Si je pose la question “Combien d'appareils peux-je produire avec un coût de production de 200€ ?”, je dois calculer la fonction réciproque. Je prends l'équation $y = 10 \cdot \sqrt{x+100}$, et j'essaie d'exprimer le nombre positif x d'appareils en fonction du coût y. Je trouve

$$x = \left(\frac{y}{10}\right)^2 - 100 = \frac{y^2}{100} - 100$$

Donc la fonction réciproque de f est $g(y) = \frac{y^2}{100} - 100$. En particulier, $x = g(200) = \frac{200^2}{100} - 100 = 300$, donc avec un coût de 200€ je peux produire 300 appareils.

Exemple 3 On définit la *puissance* $k$ième de x par

$$x^k = x \cdot \ldots \cdot x \qquad (k \text{ facteurs})$$

La fonction réciproque de $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^k$ s'appelle la *racine* $k$ième, $y \mapsto \sqrt[k]{y}$. Donc si j'ai un nombre positif y et je cherche un nombre x tel que $x^k = y$, la réponse est par définition : $x = \sqrt[k]{y}$.

Définition 2.3 *Soit $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $I \subseteq D_f$ un intervalle. On dit que f est* croissante *sur I si*

$$\forall x, y \in I,\ (x \leqslant y \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant f(y))$$

On dit que f est strictement croissante *sur I si*

$$\forall x, y \in I,\ (x < y \ \Rightarrow\ f(x) < f(y))$$

c'est à dire, si f préserve les inégalités larges (respectivement, les inégalités strictes).

On dit que f est décroissante *sur I si*

$$\forall x, y \in I,\ (x \leqslant y \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant f(y))$$

La propriété d'être strictement décroissant *est définie de façon semblable.*

Remarque L'idée graphique est que le graphe d'une fonction croissante "monte tout le temps" et le graphe d'une fonction décroissante "descend tout le temps".

Exemples (a) La fonction $f(x) = 3x - 1$ est croissante, et la fonction $f(x) = -2x + 3$ est décroissante. Plus généralement, la fonction $f(x) = ax + b$ (où $a, b \in \mathbb{R}$) est croissante si $a \geqslant 0$, et elle est décroissante si $a \leqslant 0$.

(b) La fonction $f\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ est strictement croissante. Ceci veut dire que pour deux nombres a, b positifs, $a < b \ \Rightarrow\ a^2 < b^2$.

(c) La fonction $f\colon\ ]0, +\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ est strictement décroissante. Ceci veut dire que pour deux nombres a, b positifs, $a < b \ \Rightarrow\ \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Autre exemple (voir Figure 3) Étudions le lien qui existe entre la quantité de produits disponible sur le marché (par exemple, des maisons dans le quartier Thabor à vendre) et son prix. Il faut regarder deux fonctions:

La fonction *Offre* : plus les prix sont élevés, plus les propriétaires vont être prêts à vendre leur bien, plus l'offre va augmenter. Donc la fonction *Offre*, qui à la quantité x associe le prix qui doit être offert sur le marché pour créer une offre de x maisons, est toujours *croissante.*

La fonction *Demande* : si les prix sont élevés, la quantité de biens qui trouve un acheteur va être petite, et vice versa. Donc la fonction *Demande*, qui a la quantité x associe le prix consenti par x acheteurs, est toujours *décroissante.*

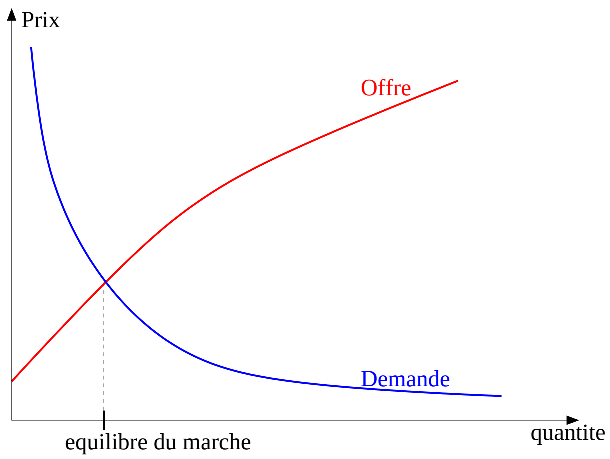


Figure 3: Exemple de deux fonctions “offre” et “demande”

2.3 Exemples importants de fonctions

2.3.1 Les fonctions linéaires

- c'est à dire, les fonctions de la forme $f(x) = ax$, où $a \in \mathbb{R}$. **À rajouter !**

Exemples : conversion, règle des trois

2.3.2 Les fonctions affines

- c'est à dire, les fonctions de la forme $f(x) = ax + b$, où $a, b \in \mathbb{R}$. Son graphe est une droite de pente a qui intersecte l'axe x en $-b/a$ et l'axe y en b.

Exemple Supposons que nous souhaitons trouver le point d'intersection des deux droites

$$y = f_1(x) = 3x + 7 \quad \text{et} \quad y = f_2(x) = x - 3$$

Comment fait-on ? On cherche une valeur x avec $f_1(x) = f_2(x)$, donc avec $3x+7 = x-3$. Cette équation est équivalente à $2x = -10$, ou encore à $x = -5$. On a $f_1(-5) = f_2(-5) = -8$, donc le point d'intersection est $(-5, -8)$.

Exemple La demande d'un meuble est de 10 unités si le prix est 160 Euros et de 20 unités si le prix est de 120 Euros. Nous supposons que la fonction demande est affine $f(x) = ax + b$. Nous souhaitons calculer l'équation de la demande. Nous souhaitons donc trouver a, b tels que

$$\begin{aligned} 160 &= a \cdot 10 + b \\ 120 &= a \cdot 20 + b \end{aligned}$$

Par exemple par élimination (exercice) nous trouvons $a = -4$, $b = 200$, donc nous avons la fonction demande $f(x) = -4x + 200$.

2.3.3 Fonctions quadratiques

c'est à dire, des fonctions de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Proposition 2.4 *Pour trouver les racines d'une telle fonction, c.à.d. les solutions de l'équation*

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

on calcule

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- *Si* $\Delta > 0$, *il y a deux racines,* $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- *Si* $\Delta = 0$, *il y a une racine,* $x = \frac{-b}{2a}$
- *Si* $\Delta < 0$, *il n'y a pas de racine.*

Démonstration Admise, mais l'idée est que l'équation (1) est équivalente à $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$. □

Remarquons aussi que la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ prend son maximum ou minimum en $x = \frac{-b}{2a}$. En fait, le graphe est symétrique autour de l'axe $x = \frac{-b}{2a}$ – voir Figure 4.

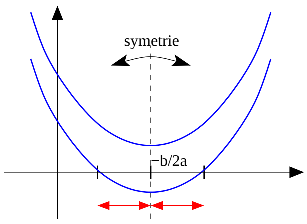


Figure 4: Symétrie du graphe de $f(x) = ax^2 + bx + c$. Chaque flèche rouge est de longueur $\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exemple (voir Figure 5) Cherchons le point d'équilibre de

$$\begin{aligned} \text{offre} &: \quad y = x + 5 \\ \text{demande} &: \quad y = \frac{10}{x+1} - 1 \end{aligned}$$

Il faudra resoudre l'équation

$$\begin{aligned} x + 5 &= \frac{10}{x+1} - 1 \\ \Leftrightarrow \quad (x+5)(x+1) &= 10 - (x+1) \\ \Leftrightarrow \quad x^2 + 7x - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad x = \frac{-7 + \sqrt{65}}{2} \quad &\text{ou} \quad x = \frac{-7 - \sqrt{65}}{2} \end{aligned}$$

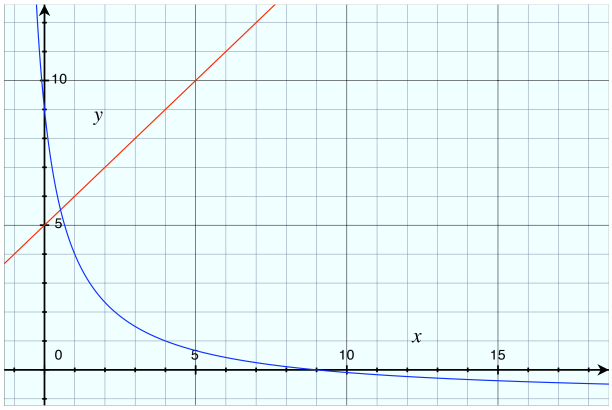


Figure 5: Offre et demande

La seule solution qui a un sens économique ($x > 0$) est la première: $x \cong 0.53$, et avec $y = x + 5$ on a $y \cong 5.53$. Donc le point d'équilibre est atteint à une quantité de 0.53 et un prix de 5.53.

2.3.4 Fonctions puissance, avec exposant entier positif

Soit k un entier positif, c.à.d., $k \in \mathbb{N}$. La *fonction puissance avec exposant* k est

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^k$$

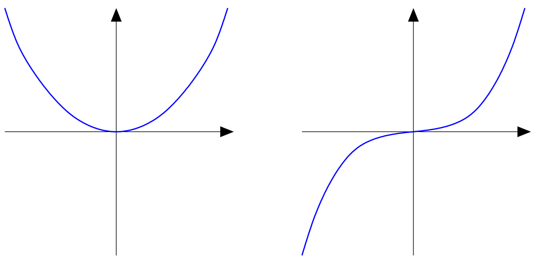


Figure 6: La fonction x^k pour k pair et k impair (esquisse grossière)

Exemple (voir Figure 7) J'ai 1000€ placés sur un PEL. Regardons le montant qui se trouve sur ce plan au bout de 5 ans, en fonction du taux d'intérêt x. La formule pour ce montant est $f(x) = 1000 \cdot (1 + x)^5$ Par exemple, avec un taux d'interêt de 3,5% =0,035, après 5 ans, on a ∼1188€.

Définition 2.5 *Un* polynôme *(de degré d) est une fonction de la forme* $x \mapsto a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \ldots + a_1 x + a_0$*, où* $a_i \in \mathbb{R}$*. Par exemple,* $x \mapsto 5x^3 - \frac{7}{3}x^2 + 2$ *est un polynôme de degré* 3*.*

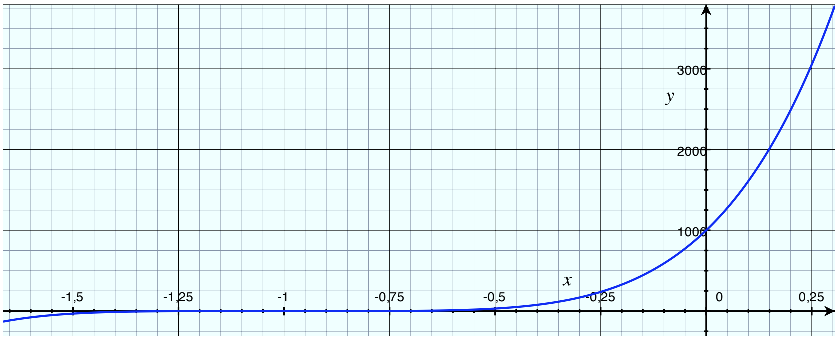


Figure 7: Sur l'axe x, le taux d'intérêt. Sur l'axe y, l'argent sur le compte après 5 ans, calculé par la formule $1000 \cdot (1+x)^5$. (La partie du graphe avec $x < 0$ a un sens mathématique, mais pas beaucoup de sens économique.)

2.3.5 Les fonctions exponentielle et logarithme

Je suppose que vous connaissez la fonction *exponentielle* $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$, $x \mapsto \exp(x)$ et sa fonction réciproque, le *logarithme (népérien)* $\ln : \ ]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x)$ – voir Figure 8.

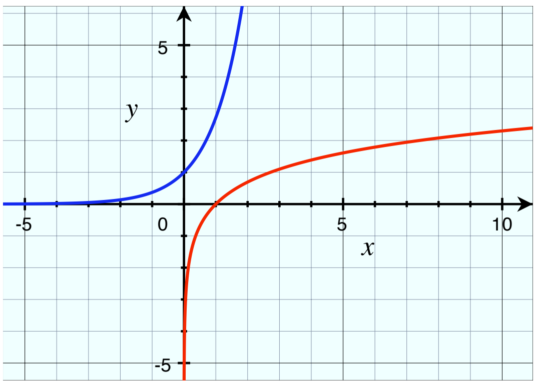


Figure 8: Les graphes des fonctions exp (bleu) et ln (rouge). Remarquez que $\exp(0) = 1$ et $\ln(1) = 0$.

Remarque Si vous ne connaissez pas la fonction exp, vous connaissez sûrement la fonction e^x – c'est la même chose, comme on verra bientôt : $\exp(x) = e^x$.

Remarque pour les spécialistes Pour être un peu plus rigoureux, on peut définir exp comme l'unique fonction f telle que $f'(x) = f(x)$ pour tout x et telle que $f(0) = 1$. On peut définir ln comme l'unique fonction f telle que $f'(x) = \frac{1}{x}$ et telle que $f(1) = 0$.

Proposition 2.6 *On a des règles de calcul pour la fonction exponentielle :*

- $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

- *Si* $\alpha \in \mathbb{N}$*, alors* $(e^x)^\alpha = e^{\alpha x}$

et pour la fonction logarithme :

- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$
- *Si* $\alpha \in \mathbb{N}$*, alors* $\ln(x^\alpha) = \alpha \cdot \ln(x)$

Définition 2.7 *(Puissance) Si* $a > 0$ *et* $b \in \mathbb{R}$*, alors on définit*

$$a^b = \exp\left(b \cdot \ln(a)\right)$$

Exercice Démontrer que $x^2 = x \cdot x$ (et plus généralement : $x^k = x \cdot \ldots \cdot x$, avec k facteurs).

Donc la définition 2.7 est raisonnable : dans le cas particulier où b est un entier, elle coincide avec la définition que vous connaissez du lycée.

Règles de calcul

$$a^{b+c} = a^b \cdot a^c \qquad \text{et} \qquad a^{-b} = \frac{1}{a^b}$$

(Vous pouvez démontrer ces règles en utilisant les règles de calcul de la fonction exp.)

Attention Si $a < 0$, alors a^b n'est en général pas défini. Par exemple $-1^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$ n'est pas défini. Néanmoins, si $b \in \mathbb{Z}$, alors a^b est quand même défini, par

$$a^b = a \cdot \ldots \cdot a \ \ (b \text{ fois, si } b > 0), \quad \text{et} \ \ a^b = \frac{1}{a \cdot \ldots \cdot a} \ \ (-b \text{ fois, si } b < 0)$$

Notation On note e le nombre $e := \exp(1) = 2.7182818284\ldots$

Observation Puisque $\exp(x) = \exp(x \cdot 1) = \exp(x \cdot \ln(e)) = e^x$, on a

$$\exp(x) = e^x$$

2.3.6 Fonctions puissance, avec exposant arbitraire

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, considérons la fonction $f\colon\ ]0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto x^\alpha$. Le graphe d'une telle fonction est très différent selon la valeur de α – essentiellement, il faut distinguer trois cas, $\alpha < 0$, $0 < \alpha < 1$, et $\alpha > 1$ (voir figure 9).

Exemple Pour $k \in \mathbb{N}$ on a

$$x^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{x} \quad \text{et} \quad x^{-\frac{1}{k}} = \frac{1}{\sqrt[k]{x}}$$

(Démonstration de la première formule : on observe que $x \mapsto x^{\frac{1}{k}}$ est la fonction réciproque de $x \mapsto x^k$.)

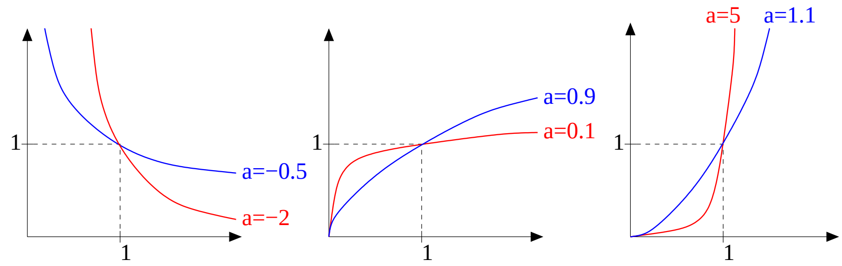


Figure 9: Le graphe de la fonction $x \mapsto x^\alpha$, pour $\alpha < 0$, $0 < \alpha < 1$, et $\alpha > 1$.

2.3.7 Exponentielle et logarithme de base arbitraire

Exemple Si je place 1000 Euros sur un compte remuneré à 3.5%, alors après t années j'ai $f(t) = 1000 \cdot (1,035)^t$ (voir figure 10).

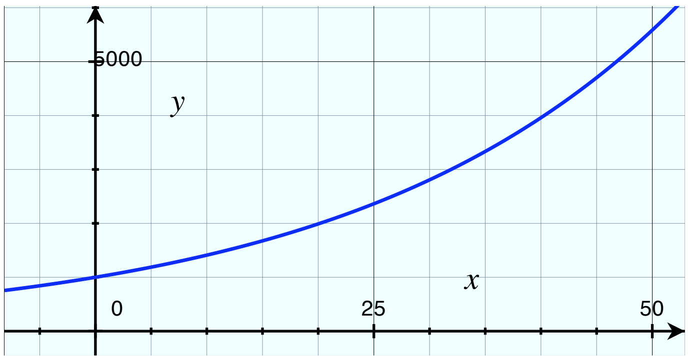


Figure 10: Sur l'axe x, le nombre d'années. Sur l'axe y, l'argent sur le compte, calculé par la formule $1000 \cdot (1,035)^x$.

Définition 2.8 *Pour $a > 0$, la fonction*

$$f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ \ x \mapsto a^x$$

*s'appelle l'*exponentielle de base a*. Sa fonction réciproque s'appelle le* logarithme de base a*,*

$$g\colon\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ \ y \mapsto \log_a(y).$$

Exemple $\log_4(16) = ??$ Réponse : $\log_4(16) = 2$ parce que $4^2 = 16$.

Remarque Comment calculer $\log_a(y)$ si la calculette n'a qu'un bouton "ln":

$$\log_a(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$$

(Démonstration: si $y = a^x = \exp(x \cdot \ln(a))$, alors $\ln(y) = x \cdot \ln(a)$ et donc $x = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$; c'est-à-dire, la fonction réciproque de $x \mapsto a^x$ est la fonction $y \mapsto \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$.)

Exemple Si j'ai 1000 Euros placés à un taux de 3,5%, combien d'années dois-je attendre pour doubler mon argent, c.à.d. pour arriver à 2000 Euros ? Réponse : je dois trouver t tel que $1000 \cdot (1{,}035)^t = 2000$, c'est-à-dire tel que $(1{,}035)^t = 2$. Donc $t = \log_{1{,}035}(2)$. Comme ma calculatrice n'a pas de bouton $\log_{1{,}035}$, je calcule : $t = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}035)}$ =20,15. Je dois donc attendre 20,15 ans. (En fait, comme les intérêts ne sont payés qu'une fois par an, je dois attendre 21 ans.)

Notation En notant $e := \exp(1) = 2.71\ldots$, on a $\exp(x) = e^x$ et $\ln(x) = \log_e(x)$. Un autre logarithme qui apparaît assez souvent est le logarithme de base 10, qui est souvent noté $\log(x)$:

$$\log(x) := \log_{10}(x)$$

Règles de calcul pour les foncitons exponentielle et logarithme de base arbitraire: comme pour exp et ln, à savoir :

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad \text{si } \alpha \in \mathbb{R}, \text{ alors } (a^x)^\alpha = a^{\alpha x}$$

et pour $x, y, a > 0$ on a

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \log_a(\tfrac{1}{x}) = -\log_a(x), \quad \log_a(x^\alpha) = \alpha \cdot \log_a(x)$$

2.4 Manipulation d'inégalités

Rappel Si on a une inégalité

$$x \leqslant y$$

- si f est une fonction strictement croissante, alors ceci est équivalent à $f(x) \leqslant f(y)$
- si f est une fonction strictement décroissante, alors ceci est équivalent à $f(y) \leqslant f(x)$

Exemple Pour quels nombres x est-ce qu'on a

$$2^{-x} \geqslant 4$$

ou, de façon équivalente, $\exp(-x \cdot \ln(2)) \geqslant 4$? En appliquant la fonction strictement croissante $z \mapsto \ln(z)$ aux deux côtés, on obtient équivalence avec l'inégalité

$$-x \cdot \ln(2) \geqslant \ln(4)$$

En applicant la fonction strictement croissante $z \mapsto \frac{z}{\ln(2)}$ on a équivalence avec l'inégalité

$$-x \geqslant \frac{\ln(4)}{\ln(2)}$$

En applicant la fonction strictement décroissante $z \mapsto -z$ on a équivalence avec

$$x \leqslant \frac{-\ln(4)}{\ln(2)}$$

Enfin, on peut simplifier le membre droit

$$x \leqslant -\frac{\ln(2^2)}{\ln(2)} = -\frac{2 \cdot \ln(2)}{\ln(2)} = -2$$

L'inégalité est donc vraie pour $x \leqslant -2$.

3 Dérivées

3.1 Définition de la dérivée

Définition 3.1 *Soit $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ une fonction. La* dérivée *de f au point x, notée $f'(x)$ est*

$$f'(x) = \text{limite}_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

lorsqu'elle existe.

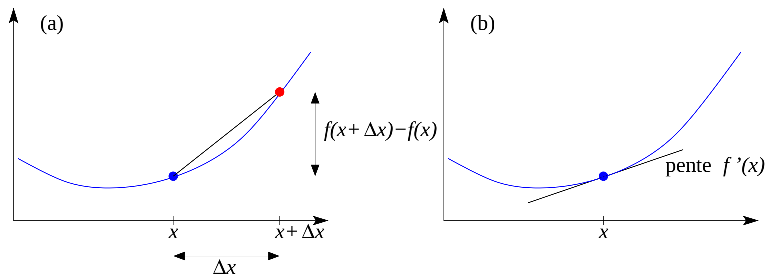


Figure 11: (a) La pente du segment de droite noir est $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. (b) Quand Δx tend vers 0, cette pente tend vers la pente du graphe au point bleu, c.à.d. vers $f'(x)$.

Nous ne discuterons pas la signification exacte du mot "limite". Une bonne idée intuitive suffira pour nos applications.

Attention La limite n'existe pas toujours ! Deux exemples.

(a) $f\colon x \mapsto |x|$. Essayons de calculer $f'(x)$ en $x = 0$. On a $f(0) = 0$.

- Quand $\Delta x > 0$, on a $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.
- Quand $\Delta x < 0$, on a $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$.

Même pour Δx très proche de 0, la pente $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ n'est pas forcément proche d'un certain nombre, c.à.d. la limite $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ n'existe pas, la fonction f n'est pas dérivable en $x = 0$.

(b) $f\colon x \mapsto x \cdot \sin(\frac{1}{x})$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = 0$ (voir figure 13).

Remarque Deux interprétations graphiques de la dérivée $f'(x)$:

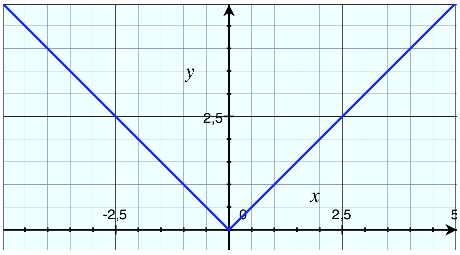


Figure 12: Le graphe de $f\colon\ x \mapsto |x|$. La dérivée $f'(0)$ n'est pas définie

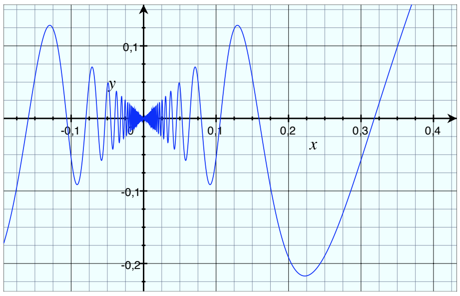


Figure 13: Le graphe de $f\colon\ x \mapsto x \cdot \sin(\frac{1}{x})$ (et $0 \mapsto 0$). La dérivée $f'(0)$ n'est pas définie

- Pente du graphe de f au point x.
- Si un bonhomme se ballade avec vitesse 1 sur $\mathbb{R}$, alors au moment où le bonhomme traverse le point x, son image f(bonhomme) se ballade avec vitesse $f'(x)$.

3.2 Règles de calcul pour la dérivée

Exemple Calcul de la dérivée de $f(x) = x^2$: on a

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

et donc

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 2x$$

Théorème 3.2 (Dérivée de fonction usuelles) .

- *Pour* $f(x) = x^a$ *on a* $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$
- *Pour* $f(x) = \ln(x)$ *on a* $f'(x) = \frac{1}{x}$. *Plus généralement, pour* $f(x) = \log_a(x)$ *on a* $f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$
- *Pour* $f(x) = \exp(x)$ *on a* $f'(x) = \exp(x)$. *Plus généralement, pour* $f(x) = a^x$ *on a* $f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$.

Démonstration Vu que nous n'avons même pas rigoureusement défini les fonctions exp et ln, on est obligé d'admettre ces résultats fondamentaux.

Exemple Si $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, alors $f'(x) = (-1) \cdot x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$.

Théorème 3.3 (Opérations sur les fonctions) *Si f et g sont des fonctions dérivables, et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors les fonctions*

$$\begin{array}{rcl} f+g & : & x \mapsto f(x)+g(x) \\ f \cdot g & : & x \mapsto f(x) \cdot g(x) \\ \lambda f & : & x \mapsto \lambda \cdot f(x) \\ \frac{f}{g} & : & x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \\ \frac{1}{g} & : & x \mapsto \frac{1}{g(x)} \\ g \circ f & : & x \mapsto g(f(x)) \end{array}$$

sont dérivables là où elles sont définies, et leurs dérivées sont

$$\begin{array}{rcl} (f+g)'(x) & = & f'(x)+g'(x) \\ (f \cdot g)'(x) & = & f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\ (\lambda f)'(x) & = & \lambda \cdot f'(x) \\ (\frac{f}{g})'(x) & = & \frac{f'(x)\ g(x) - f(x)\ g'(x)}{(g(x))^2} \\ (\frac{1}{g})'(x) & = & \frac{-g'(x)}{(g(x))^2} \\ (g \circ f)'(x) & = & g'(f(x)) \cdot f'(x) \end{array}$$

Exemple comment appliquer la dernière règle : supposons vous avez oublié comment dériver la fonction a^x. Vous écrivez la définition de cette expression $a^x = \exp(x \cdot \ln(a))$. Vous définissez des fonctions auxiliaires $g(x) = \exp(x)$ et $f(x) = x \cdot \ln(a)$, de telle façon que $a^x = g(f(x))$. Maintenant vous pouvez calculer

$$\begin{array}{rcl} (a^x)' & = & (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \exp'(x \cdot \ln(a)) \cdot \ln(a) \\ & = & \exp(x \cdot \ln(a)) \cdot \ln(a) = a^x \cdot \ln(a) \end{array}$$

En règle générale, pour calculer les dérivées de fonctions compliquées, n'hésitez pas à définir (au moins dans votre tête) des fonction auxiliaires.

Corollaire 3.4 *Si g est une fonction, et si l'on connait la fonction réciproque f de g ainsi que la dérivée de f, alors on peut calculer la dérivée de g :*

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

(Seule exception : si $f'(g(x)) = 0$, alors la règle ne s'applique pas.)

Démonstration On a $x = f(g(x))$. En dérivant les deux membres on obtient $1 = f'(g(x)) \cdot g'(x)$, c.q.f.d.

3.3 Applications économiques

3.3.1 Coût marginal

Si je fabrique certains appareils, et

si $f(x) =$ coût de produire x unités, alors *Coût Marginal*$(x) := f'(x)$

La signification économique de cette définition est la suivante: en très bonne approximation, le coût marginal est le coût supplémentaire pour la fabriquation d'une unité supplémentaire. Par exemple, si le coût de production de x appareils est $f(x) = 10 \cdot \sqrt{x + 100}$, alors produire 300 appareils coûte 200 Euros, et produire un 301ième appareil coûte $f(301) - f(300)$ =0,2498 Euros de plus. Or, dans notre exemple le coût marginal est $f'(300) = \frac{10}{2\cdot\sqrt{300+100}} = \frac{10}{40} = 0,25$.

3.3.2 Revenu marginal

De façon semblable, si $RT(x)$ est le revenu total en fonction de x, le nombre d'unités demandés, alors

$$\textit{Revenu marginal} := RT'(x)$$

En bonne approximation, le revenu marginal est le revenu supplémentaire par unité supplémentaire demandée.

Typiquement, la fonction $RT(x)$ est de la forme

$$RT(x) = x \cdot f(x), \text{ où } f(x) \text{ est la fonction Demande}$$

c.à.d., $f(x)$ représente le prix par unité demandée, en fonction du nombre x d'unités demandées.

Exercice Si la fonction Demande est $f(x) = 400-2x$, calculer le revenu total et le revenu marginal en fonction de x. Dessiner les graphes des deux fonctions, les interpréter. Solution:

3.3.3 Élasticité

Définition 3.5 *Soit f une fonction dérivable en x, avec $f(x) \neq 0$. L'*élasticité *de f en x est*

$$\mathcal{E}_f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)}$$

Le dénominateur $\frac{\Delta x}{x}$ est l'augmentation *en pourcentage* de x – si, par exemple, on a initialement $x = 1000$, et ensuite on augmente x par $\Delta x = 13$ vers $x+\Delta x = 1013$, alors x a augmenté par $\frac{\Delta x}{x} = \frac{13}{1000}$ =0,013=1,3%.

De façon semblable, le numérateur $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{f(x)}$ mesure par combien de *pourcent* $f(x+\Delta x)$ est plus grand que $f(x)$. Donc :

Signification en pratique de l'élasticité : Si x augmente de $k\%$ (pour k petit), alors $f(x)$ augmente de $(\mathcal{E}_f(x) \cdot k)\%$.

Exemple Si f associe au prix x la quantité vendue (ceci est la fonction réciproque de la fonction Demande que nous connaissons bien) alors $\mathcal{E}_f(x) = -2$ veut dire: si le prix de l'article est initialement égal à x et ensuite augmente de 1%, la demande diminue de 2%.

Exercice Donnez des exemples d'articles pour lesquels, à votre avis, l'élasticité est assez importante, et d'autres pour lesquels l'élasticité est plutôt proche de 0.

3.4 Variation et recherche d'extréma

Théorème 3.6 *Soit $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ une fonction, et $I \subseteq D_f$ un intervalle.*

- *Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est constante sur I, c.à.d. le graphe de f (au moins restreint à l'intervalle I) est une ligne horizontale.*
- *Si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$, alors f est croissante sur I.*
- *Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement croissante sur I.*
- *Si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$, alors f est décroissante sur I.*
- *Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement décroissante sur I.*

Démonstration admise – bien qu'assez intuitif, ce résultat n'est pas si facile que ça à démontrer !

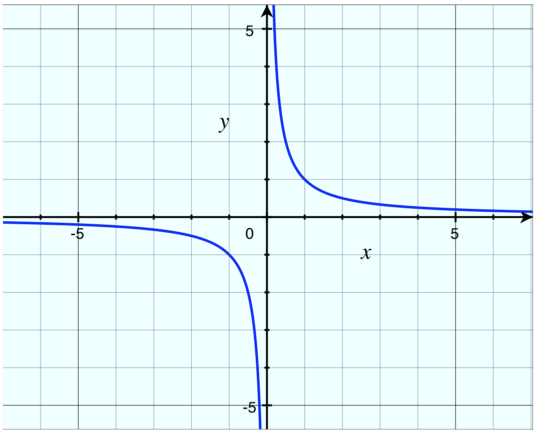


Figure 14: La fonction $\frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et aussi sur $\mathbb{R}_+$, mais pas sur tout son domaine de définition

Exemple (voir Figure 14) Soit $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$. On a $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$, et en particulier $f'(x) < 0$ pour tout x dans le domaine de définition. En effet, la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ et aussi sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Mais attention, la fonction $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas décroissante ! Par exemple, $f(-1) = -1 < 1 = f(1)$. Cet exemple n'est pas en contradiction avec le Théorème 3.6 parce que $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ n'est pas un intervalle, et le théorème ne s'applique qu'aux intervalles !

Définition 3.7 *Soit $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D_f$. On dit que f a un* minimum (global) *en a si*

$$\text{pour tout } x \in D_f, \text{ on a } \ f(a) \leqslant f(x)$$

De façon semblable, f a un maximum (global) *en a si*

$$\text{pour tout } x \in D_f, \text{ on a } \ f(a) \geqslant f(x)$$

On dit que la fonction f a un extremum (global) *en a si elle y a un maximum ou un minimum.*

Remarque Le pluriel de maximum est maxima.

Théorème 3.8 *Soit $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ une fonction qui est dérivable en tout point de D_f. Supposons que f a un extremum en a. Alors*

- *soit $f'(a) = 0$,*
- *soit a est au bord de D_f (dans le sens que tout intervalle $[s,t]$, avec $s < a < t$, contient un point qui n'appartient pas à D_f).*

Autrement dit, dans un maximum à l'intérieur du domaine de définition la dérivée f' doit s'annuler.

Attention le Théorème 3.8 ne dit *pas* que tout point a avec $f'(a) = 0$ est forcement un extremum ! Par exemple, la fonction $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ (voir Figure 15) a comme dérivée $f'(x) = 3x^2$. En particulier $f'(0) = 0$, bien que $x = 0$ ne soit ni un maximum ni un minimum de f.

Remarquez aussi que dans cet exemple, $x = 1$ est un maximum (le graphe a son plus "haut" point en $x = 1$), bien que $f'(1) = 2 \neq 0$. Selon le théorème, ceci n'est possible que parce que $x = 1$ est situé au bord du domaine de définition $D_f = [-1, 1]$.

Utilisation du théorème 3.8 : Si vous cherchez le maximum et minimum d'une fonction f qui est définie sur un intervalle $[s,t]$. Voici la procédure :

1. déterminer tous les points $x_1, x_2, \ldots$ où $f'(x) = 0$. (Selon la fonction f, cette étape peut être très difficile).
2. Calculer les valeurs $f(s), f(t), f(x_1), f(x_2), \ldots$
3. Décider laquelle des valeurs est la plus grande. Le point x_i (ou s ou t) correspondant est celui où f a son maximum.

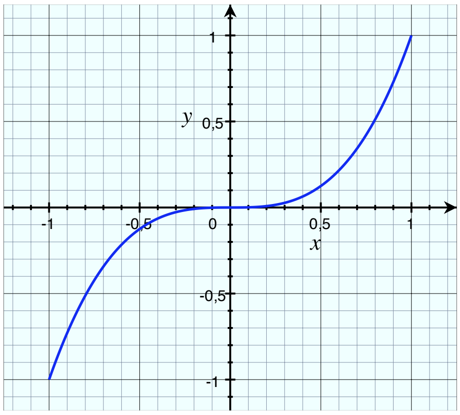


Figure 15: La fonction $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$ satisfait $f'(0) = 0$ sans avoir un extremum en $x = 0$. En plus, elle a un maximum en $x = 1$ bien que $f'(1) \neq 0$.

4. De même le point x_i (ou s ou t) où f est minimal est le point où f atteint son minimum.

Exemple Appliquer cette procédure à la fonction $f\colon [-2{,}5\,,\ 1{,}5] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{4}(x^3 + 3x^2)$ pour trouver son minimum et son maximum.

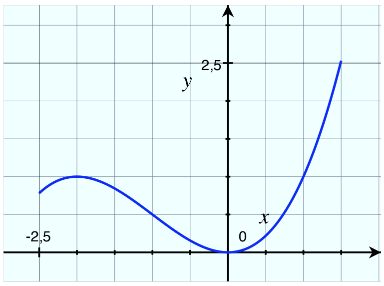


Figure 16: La fonction $f\colon [-2{,}5\ ,\ 1{,}5] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{4}(x^3 + 3x^2)$.

4 Limites

4.1 Définition de limites

Soit $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ une fonction. Soient $a, c \in \mathbb{R}$. Quelle est la signification d'une affirmation comme

- $\lim_{x\to a} f(x) = c$ (“quand x tend vers a, $f(x)$ tend vers c”)
- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = c$ (“quand x tend vers $+\infty$, $f(x)$ tend vers c”)
- $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ (“quand x tend vers a, $f(x)$ tend vers $-\infty$”)
- $\lim_{x\to a^+} f(x) = c$ (“quand x tend vers a à droite, $f(x)$ tend vers c”)

- $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ ("quand x tend vers a à gauche, $f(x)$ tend vers $+\infty$")

etcetera ?

Dans ce cours nous n'allons pas discuter en détail la signification exacte de ces affirmations (Pour les spécialistes, la première veut dire que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \ (|x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - c| < \epsilon) \ )$$

Nous allons juste donner quelques exemples.

Exemple $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, \ \ x \mapsto \frac{-1}{x^2}$

On a $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$. Graphiquement, c'est assez évident. L'idée mathématique est : si je veux être sûr que $f(x) < -1000000$, par exemple, il suffit de choisir x dans un voisinage suffisamment restreint de $x = 0$, en l'occurence $\frac{-1}{1000} < x < \frac{1}{1000}$ suffirait.

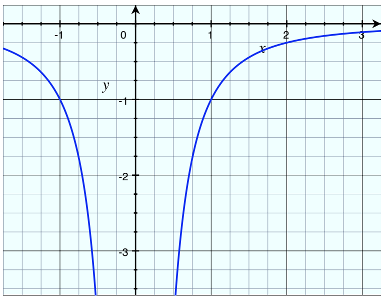


Figure 17: La fonction $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, \ \ x \mapsto \frac{-1}{x^2}$.

On a aussi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. L'idée est : si je veux être sûr que $-0{,}000001 <$ $f(x) < 0{,}000001$, il suffit de choisir x suffisamment grand ("suffisamment proche de $+\infty$"); ici $x > 1000$ suffirait.

Exemple $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, \ \ x \mapsto \frac{-1}{x}$ (voir Figure 14). Le comportement de cette fonction près de $x = 0$ est intéressant :

Si x est très proche de 0 et $x > 0$, alors $f(x)$ est un très grand nombre positif. Si x est très proche de 0 et $x < 0$, alors $f(x)$ est un très grand nombre négatif. On a

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

Exemple concernant les fonctions $\exp$ et $\ln$ (voir Figure 8) :

$$\begin{array}{ll} \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0, & \lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty \\ \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty, & \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \end{array}$$

Exemple Regardons comment on peut calculer les limites d'une fonction composée. Soit $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)$ (voir Figure 18). Elle est la composée des fonctions $x \mapsto \frac{-1}{x^2}$ et $x \mapsto \exp(x)$ vus en haut. On calcule

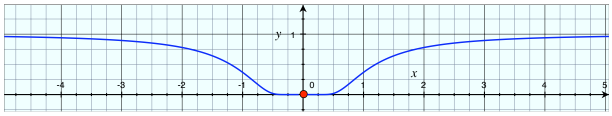


Figure 18: La fonction $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)$.

$$\begin{array}{rcccl} \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) & = & \lim_{x\to -\infty} \exp(x) & = & 0 \\ \lim_{x\to +\infty} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) & = & \lim_{x\to 0} \exp(x) & = & 1 \end{array}$$

Exemple De façon semblable, pour $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp\left(\frac{-1}{x}\right)$ (voir Figure 19) :

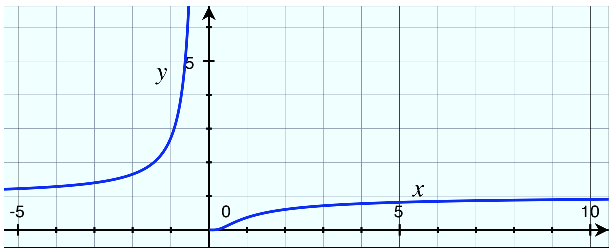


Figure 19: La fonction $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp\left(\frac{-1}{x}\right)$.

$$\begin{array}{rcccl} \lim_{x\to 0^+} \exp\left(\frac{-1}{x}\right) & = & \lim_{x\to -\infty} \exp(x) & = & 0 \\ \lim_{x\to 0^-} \exp\left(\frac{-1}{x}\right) & = & \lim_{x\to +\infty} \exp(x) & = & 1 \end{array}$$

Exemple Enfin, regardons le comportement de $f(x) = \sin(x)$ quand x tend vers $+\infty$. La limite

$$\lim_{x\to+\infty} \sin(x) \quad \text{n'existe pas}$$

Idée de la démonstration : toute valeur y avec $-1 \leqslant y \leqslant 1$ apparaît comme

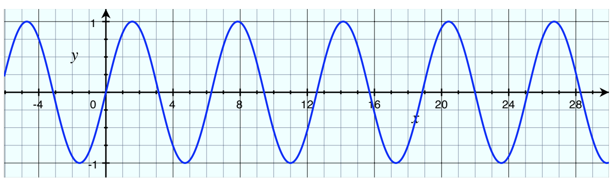


Figure 20: La fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)$.

valeur $f(x)$, même si l'on se restreint à des x très, très grands. Autrement dit, $\sin(x)$ ne peut pas avoir de limite c pour $x \to +\infty$ car même en choisissant x arbitrairement grand on ne peut pas être sûr que $f(x)$ va être proche de c.

4.2 Exemples importants de limites en $\pm\infty$

4.2.1 Limites de fractions rationelles

Premier pas On sait que

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \quad \text{et} \quad \begin{cases} \lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ \lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Deuxième pas Pour des polynômes on calcule les limites par une astuce :

$$\text{Question : } \quad \lim_{x\to+\infty} -5x^3 + 2x^2 + 3x - 7 = ?$$

Réponse : re-écrire

$$\lim_{x\to\infty} -5x^3 + 2x^2 + 3x - 7 = \lim_{x\to\infty} x^3 \cdot \underbrace{(-5 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{7}{x^3})} = \lim_{x\to\infty} -5x^3 = -\infty$$

parce que

$$\lim_{x\to\infty} -5 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{7}{x^3} = -5$$

De façon semblable : $\lim_{x\to-\infty} -5x^3 + 2x^2 + 3x - 7 = \lim_{x\to-\infty} -5x^3 = +\infty$

Moralité : pour un polynôme, les limites en $\pm\infty$ sont complètement déterminées par le terme de degré maximal.

Troisième pas Pour des fractions rationelles, c.à.d. des quotients de deux polynômes, on applique l'astuce précédent au numérateur et au dénominateur.

Exemple 1 :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2x^4 - 5x + 6}{3x^2 - 6x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4(-2 - \frac{5}{x^3} + \frac{6}{x^4})}{x^2(3 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^4}{3x^2} = \lim_{x\to\infty} \tfrac{-2}{3}x^2 = -\infty$$

Exemple 2 :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2 - 5x + 6}{3x^2 - 6x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \cdot (-2 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2})}{x^2 \cdot (3 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2})} = \frac{-2}{3}$$

Exemple 3 :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 6x + 1}{-2x^4 - 5x + 6} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \cdot (3 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2})}{x^4 \cdot (-2 - \frac{5}{x^3} + \frac{6}{x^4})} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{-2x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{3x^2} = 0$$

Moralité : pour une fraction rationelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$, les limites en $\pm\infty$ sont complètement déterminées par les termes de degré maximal de P et Q.

4.2.2 Limites des fonctions logarithme, puissance, et exponentielle

Règle En ce qui concerne les limites $x \to +\infty$, $x \to 0^+$ et $x \to -\infty$, l'exponentielle est plus forte que n'importe quelle puissance, et n'importe quelle puissance est plus forte que le logarithme.

On va illustrer la signification de cette règle avec quelques exemples.

Exemple 1 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^7} = ?$

On a $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^7} = 0$. Donc exp pousse vers $+\infty$ et $\frac{1}{x^7}$ pousse vers 0 (tout en restant positif) – qui gagne ?

Réponse : exp gagne, on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x^7} = +\infty$

Remarque La convergence vers $+\infty$ est difficilement visible sur une calculatrice – voir Figure 21).

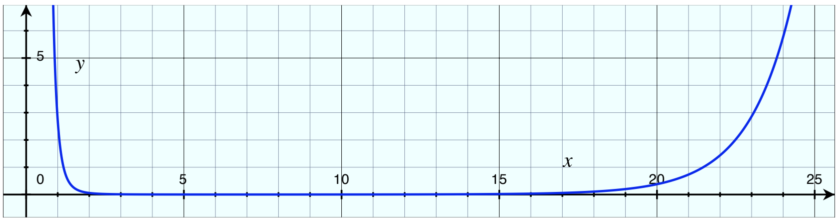


Figure 21: La fonction $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\exp(x)}{x^7}$.

Exemple 2 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = ?$

On a $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$. Donc ln pousse vers $+\infty$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}$ pousse vers 0 – qui gagne ?

Réponse : La puissance $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ gagne, on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$.

Remarque La convergence vers 0 est très lente et difficilement visible sur une calculatrice – voir Figure 22.

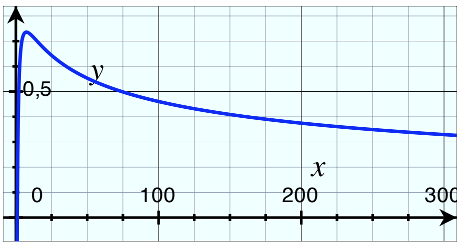


Figure 22: La fonction $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$.

Exemple 3 $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) \cdot \sqrt{x} = ?$

On a $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$. Donc ln pousse vers $-\infty$ et $\sqrt{x}$ pousse vers 0 – qui gagne ?

Réponse : La puissance $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ gagne, on a $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) \cdot \sqrt{x} = 0$.

Exemple 4 $\lim_{x\to -\infty} \left(x^5 + 3x^2 - \frac{1}{x}\right) \cdot e^x = 0$, parce que l'exponentielle est plus forte même que x^5.

4.3 Tableaux de variation

Étant donné une fonction f, l'information complète sur

- le domaine de définition
- la position des racines
- le signe de la dérivée f' (c.à.d. l'information où f est croissante et où f est décroissante)
- les valeurs de f dans les maxima et minima
- les limites $\lim_{x\to a} f(x)$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ est au bord du domaine de définition

est souvent réuni dans un *tableau de variation* de f.

5 Suites

5.1 Définition

Définition 5.1 *Une* suite *(de nombres réels)* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une application*

$$\mathbb{N} \to \mathbb{R}\ ,\ n \mapsto u_n$$

Exemple 1 $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 4$, $u_3 = 9, \ldots, u_n = n^2$ est une suite.

Exemple 2 $u_0 = 1$, $u_1 = -1$, $u_2 = 1$, $u_3 = -1, \ldots, u_n = (-1)^n$ est une suite.

Exemple 3 $u_n = \frac{\exp(n)}{n^7}$ (pour $n \geqslant 1$) définit une suite, et on a vu en chapitre 4.2.2 qu'elle satisfait $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Une suite peut être spécifiée de deux façons :

1. Explicitement, par une formule du type $u_n := f(n)$ – voir Exemples 1 – 3.
2. Récursivement, en définissant u_0 explicitement, mais u_n en fonction des termes précédents de la suite – voir Exemples 4 & 5

Exemple 4 $u_0 = 0{,}5$ et $u_{n+1} = 3{,}6 \cdot u_n \cdot (1 - u_n)$. (On peut démontrer que cette suite est, dans un certain sens technique, "chaotique". Pour plus d'informations, le mot clé est "suite logistique".)

Exemple 5 $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, et pour $n \geqslant 2$ on pose $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$. Donc, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, $u_4 = 5$, $u_5 = 8$, $u_6 = 13$, $u_7 = 21\ldots$ (Il s'agit de la fameuse *suite de Fibonacci*. On peut démontrer que la proportion $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ tend vers le nombre $\frac{1+\sqrt{5})}{2}$, le "nombre d'or". Il y a des gens qui affirment que ce nombre est sous-jacent aux proportions du Parthénon, des pyramides d'Égypte, des oeuvres de Mozart, des violons de Stradivarius, des proportions humaines et des vibrations cosmiques ...)

5.2 Suites arithmétiques

Définition 5.2 *Une* suite arithmétique *est une suite donnée par une loi de récurrence de la forme*

$$u_{n+1} = u_n + r \quad \text{où } r \in \mathbb{R} \text{ est indépendant de } n$$

Le nombre r est appelé la raison *de la suite arithmétique.*

Exemple (voir Figure 23)

$$u_0 = 2,1, \quad u_1 = 2,4, \quad u_2 = 2,7, \quad u_3 = 3, \ u_4 = 3,3, \quad u_5 = 3,6, \ \ldots$$

est une suite arithmétique de raison 0,3, et avec $u_0 = 2{,}1$. Observons qu'on peut calculer u_n directement par la formule

$$u_n = 2{,}1 + n \cdot 0{,}3.$$

Proposition 5.3 *On a une expression explicite d'une suite arithmétique en fonction du terme initial u_0 et de la raison r :*

$$u_n = u_0 + n \cdot r$$

5.3 Suites géométriques

Définition 5.4 *Une* suite géométrique *est une suite donnée par une loi de récurrence de la forme*

$$u_{n+1} = u_n \cdot q \quad \text{où } q \in \mathbb{R} \text{ est indépendant de } n$$

Le nombre q est appelé la raison *de la suite géométrique.*

Exemple (voir Figure 23) J'ai 2,10€ placés sur un compte avec des intérêts de 9% annuels ! Si u_n note l'argent sur le compte après n années, alors $u_{n+1} = u_n \cdot 1{,}09$. Observons qu'on peut calculer u_n directement par la formule

$$u_n = 2,1 \cdot 1,09^n$$

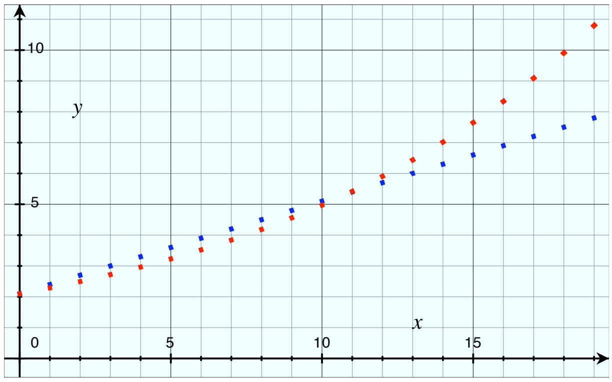


Figure 23: La suite arithmétique $u_n = 2{,}1 + 0{,}3 \cdot n$ (bleu), et la suite géométrique $u_n = 2{,}1 \cdot 1{,}09^n$ (rouge)

Proposition 5.5 *On a une expression explicite d'une suite géométrique en fonction du terme initial u_0 et de la raison q :*

$$u_n = u_0 \cdot q^n$$

5.4 Suites arithmético-géométriques

Définition 5.6 *Une* suite arithmético-géométrique *est une suite donnée par une loi de récurrence de la forme*

$$u_{n+1} = q \cdot u_n + r \qquad \text{où} \quad q, r \in \mathbb{R} \quad \text{sont indépendants de} \quad n$$

Remarque On va supposer que $q \neq 1$ et $r \neq 0$, car

- si $q = 1 \quad \Rightarrow \quad$ suite arithmétique
- si $r = 0 \quad \Rightarrow \quad$ suite géométique

Proposition 5.7 *On a une expression explicite d'une suite arithmético-géométrique en fonction du terme initial u_0 et des raisons q et r :*

$$u_n = q^n \cdot \left(u_0 + \frac{r}{q-1}\right) - \frac{r}{q-1}$$

Démonstration On définit la suite $v_n := u_n + \frac{r}{q-1}$. Cette suite est géométrique de raison q, parce que

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} + \tfrac{r}{q-1} \\
&= q \cdot u_n + r + \tfrac{r}{q-1} \\
&= q \cdot u_n + \tfrac{(q-1)\cdot r}{q-1} + \tfrac{r}{q-1} \\
&= q \cdot u_n + \tfrac{q \cdot r}{q-1} \\
&= q \cdot \left(u_n + \tfrac{r}{q-1}\right) \\
&= q \cdot v_n
\end{aligned}$$

En particulier, d'après la Proposition 5.5 on a $v_n = q^n \cdot v_0$, et donc

$$u_n + \frac{r}{q-1} = v_n = q^n \cdot v_0 = q^n \cdot \left(u_0 + \frac{r}{q-1}\right)$$

ce qui implique immédiatement la formule de l'énoncé. □

Exemple Remboursement d'un emprunt (voir Figure 24). Si la somme empruntée est de $u_0 = 1000$€, avec un taux de 8% ($q = 1{,}08$) et des remboursements annuels de 85€ ($r = -85$), alors la somme u_n qui reste à rembourser apres n années se calcule récursivement

$$u_{n+1} = 1,08 \cdot u_n - 85$$

et explicitement

$$\underline{u_n} = 1,08^n \cdot \left(1000 + \frac{-85}{0,08}\right) - \frac{-85}{0,08} = \underline{1062,5 - 62,5 \cdot 1,08^n}$$

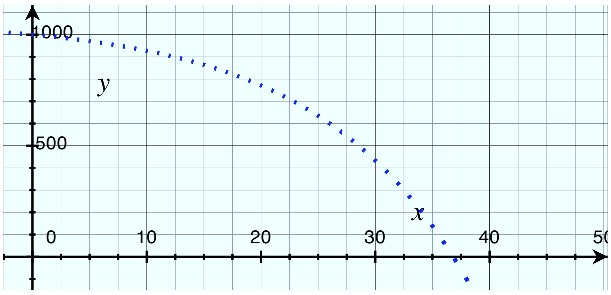


Figure 24: Remboursement d'un emprunt de 1000€, avec un taux de 8% et des remboursements annuels de 85€. Le prêt est remboursé après 37 ans. En total vous aurez alors payé presque $37 \cdot 85€ = 3145€$.

Résumé Nous avons discuté trois types de suites, et pour chaque type nous avons un modèle économique simple :

Suite arithmétique – son modèle économique est la tirelire : j'ai initialement 2,10€ dans ma tirelire, et chaque mois ma Maman me donne 30 centimes.

Suite géométrique – son modèle économique est un compte d'épargne que je n'alimente pas, mais qui continue à gagner des intérêts.

Suite arithmético-géométrique – son modèle économique est le remboursement d'un prêt. (Un autre modèle économique serait un compte d'épargne qui est alimenté régulièrement.)

6 Algèbre linéaire : systèmes d'équations linéaires

6.1 Exemple d'un système d'équations linéaires

Dans cet exemple on va utiliser la notation suivante :

$$\begin{aligned} \text{Une “unité” de beurre} &= \text{100g de beurre,} \\ \text{une “unité” de sucre} &= \text{100g de sucre.} \end{aligned}$$

J'ai dans mon frigo/placard

$$\text{15 unités de beurre,} \quad \text{20 oeufs} \quad \text{et} \quad \text{30 unités de sucre,}$$

et je veux transformer tout ça en gâteaux. Je ne connais que trois recettes de gâteau, qui utilisent les quantités suivantes :

	Recette 1	Recette 2	Recette 3
beurre	1	2	1
oeufs	1	3	3
sucre	2	2	8

Question Combien de gâteaux de chaque type dois-je produire pour utiliser toutes mes ressources – pas plus et pas moins ?

Mise en équation Si l'on appelle x_i (pour $i = 1$ ou 2 ou 3) le nombre de gâteaux de recette i, on obtient trois équations. Nous introduisons tout de suite une notation abrégée, très populaire.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 15 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 20 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 8x_3 & = & 30 \end{array} \qquad \text{abréviation :} \qquad \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 2 & 1 & 15 \\ 1 & 3 & 3 & 20 \\ 2 & 2 & 8 & 30 \end{array}$$

Si, par inspiration métaphysique, je dévine la bonne réponse,

$$x_1 = 8, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 1$$

(c.à.d. je dois faire 8 gâteaux de la première recette, 3 de la deuxième et un seul de la troisième), alors cette réponse est facile à vérifier. En effet, on a bien

$$\begin{array}{rcrcrcl} 8 & + & 2 \cdot 3 & + & 1 & = & 15 \\ 8 & + & 3 \cdot 3 & + & 3 \cdot 1 & = & 20 \\ 2 \cdot 8 & + & 2 \cdot 3 & + & 8 \cdot 1 & = & 30 \end{array}$$

Mais comment trouve-t-on une telle solution ?

6.2 Solutions de systèmes en forme échelonnée

Définition 6.1 *Un système d'équations linéaires est en* forme échelonnée réduite *s'il a la forme suivante.*

$$\left(\begin{array}{cccccccccc|c}
1 & * \dots * & 0 & * \dots * & 0 & * \dots & 0 & * & \dots & * & * \\
 & & 1 & * \dots * & 0 & * \dots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & & & 1 & * \dots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & & & & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & 1 & * & \dots & * & \vdots \\
 & & & & & & & & & & *
\end{array}\right)$$

Dans ce schéma, il y a un nombre arbitraire de colonnes "bleues" (peut-être aucune). Une étoile signifie un nombre réel arbitraire (peut-être 0*). Si dans une position de ce tableau il n'y rien écrit, ceci signifie qu'il doit y avoir un* 0*.*

Une condition un peu moins stricte sur le système d'équations est qu'il soit en forme échelonnée*. Un tel système doit avoir la même forme générale qu'un système échelonné réduit, sauf que dans le schéma précédent les* 0 *rouges sont remplacés par des étoiles* $*$ *.*

Attention La notation des colonnes "rouges" et "bleues" est une aide visuelle utilisé dans ce poly, il ne s'agit pas du tout d'une notation standard !

Observations (a) Pour un système d'équations linéaires en forme échelonnée réduite il est facile de décider s'il y a des solutions, et si oui, de décrire explicitement l'ensemble de toutes les solutions.

(b) Dans cette déscription, les variables correspondants aux colonnes "bleues" sont les variables libres – en particulier, la dimension de l'ensemble des solutions est égal au nombre de colonnes bleues.

Exemple 1 Le système

$$\begin{array}{rcrcrcl}
x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & = & 8 \\
0x_1 & + & x_2 & + & 0x_3 & = & 3 \\
0x_1 & + & 0x_2 & + & x_3 & = & 1
\end{array} \qquad \text{c.à.d.} \qquad
\begin{array}{ccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline
1 & 0 & 0 & 8 \\
 & 1 & 0 & 3 \\
 & & 1 & 1
\end{array}$$

a une seule solution : $x_1 = 8$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$.

Exemple 2 Le système

$$\begin{array}{rcrcrcl}
x_1 & + & 0x_2 & - & x_3 & = & -2 \\
0x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \\
0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & = & 2
\end{array} \qquad \text{c.à.d.} \qquad
\begin{array}{ccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline
1 & 0 & -1 & -2 \\
 & 1 & 2 & 8 \\
 & & & 2
\end{array}$$

n'a aucune solution, car l'équation $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 2$ n'a évidemment pas de solution. Dans notre schéma, on voit que la dernière colonne ("noire") est plus longue (3 nombres dans cette colonne) que la partie gauche ("rouge" et "bleue") du tableau, qui n'a que deux lignes.

Exemple 3 Le système

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 0x_4 & - & x_5 & = & 15 \\ & & & & & & x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \end{array} \qquad \text{c.à.d.}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 15 \\ & & & 1 & 3 & 2 \end{array}$$

a des solutions. Plus précisement l'ensemble des solutions est de dimension 3 : les trois variables x_2, x_3 et x_5 sont les variables libres, et x_1 et x_4 sont déterminées en fonction d'eux.

Solutions $x_2, x_3, x_5 \in \mathbb{R}$ arbitraires, $x_1 = 15 - 2x_2 - x_3 + x_5$, $x_4 = 2 - 3x_5$

Par exemple, pour $x_2 = 1$, $x_3 = 3$ et $x_5 = 2$ on obtient la solution

$$x_1 = 15 - 2 \cdot 1 - 3 + 2 = 12, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 2 - 3 \cdot 2 = -4, \quad x_5 = 2$$

mais il y en a beaucoup d'autres.

6.3 Trouver toutes les solutions d'un système d'équations linéaires

Étant donné un système d'équations linéaires, notre stratégie pour trouver toutes ses solutions va être de procéder en deux pas :

Premier pas Construire un système d'équations linéaires qui

1. est en forme échelonnée, et
2. est équivalent au système original, dans le sens qu'il a exactement le même ensemble de solutions.

Second pas Trouver les solutions du système échelonnée, comme expliqueé dans la section 6.2.

Nous allons à présent expliquer le premier pas.

Observation Les opérations suivantes ne changent pas l'ensemble de solutions d'un système d'équations linéaires

(A) Échanger deux lignes

(B) Multiplier ou diviser tous les nombres dans une ligne par un nombre réel différent de 0 (tous par le même nombre)

(C) Modifier une ligne en y additionnant un multiple d'une autre ligne.

Théorème 6.2 *On peut transformer tout système d'équations linéaires vers un système en forme échelonnée par une succession de modifications des types (A), (B), et (C).*

Plutôt que démontrer le résultat rigoureusement, on va donner un

Exemple Le système étudié en Section 6.1 pour trouver le bon nombre de gateaux. La stratégie est de transformer ce système d'abord en un système en forme échelonnée, et ensuite en un système échelonné réduit.

$$
\begin{array}{ccc|cl}
x_1 & x_2 & x_3 & & \\
\hline
\underline{1} & 2 & 1 & 15 & L_1 \\
1 & 3 & 3 & 20 & L_2 \hookleftarrow L_2 - L_1 \quad \text{(operation (C))} \\
2 & 2 & 8 & 30 & L_3 \hookleftarrow L_3 - 2L_1 \quad \text{(operation (C))} \\
\hline
1 & 2 & 1 & 15 & \\
0 & \underline{1} & 2 & 5 & \\
0 & -2 & 6 & 0 & L_3 \hookleftarrow L_3 + 2L_2 \\
\hline
1 & 2 & 1 & 15 & \\
0 & 1 & 2 & 5 & \\
0 & 0 & 10 & 10 & L_3 \hookleftarrow \frac{L_3}{10} \quad \text{(operation (B))} \\
\hline
1 & 2 & 1 & 15 & \\
0 & 1 & 2 & 5 & \\
0 & 0 & 1 & 1 &
\end{array}
$$

Nous avons déjà réussi à transformer le système vers une forme échelonnée. On voit déjà qu'il y aura trois colonnes "rouges". Persévérons pour obtenir une forme échelonnée réduite :

$$
\begin{array}{ccc|cl}
1 & 2 & 1 & 15 & L_1 \hookleftarrow L_1 - L_3 \\
0 & 1 & 2 & 5 & L_2 \hookleftarrow L_2 - 2L_3 \\
0 & 0 & \underline{1} & 1 & \\
\hline
1 & 2 & 0 & 14 & L_1 \hookleftarrow L_1 - 2L_2 \\
0 & \underline{1} & 0 & 3 & \\
0 & 0 & 1 & 1 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 8 & \\
0 & 1 & 0 & 3 & \\
0 & 0 & 1 & 1 &
\end{array}
$$

Et on trouve notre systéme échelonné réduit qui a évidemment exactement une solution

$$(x_1,\ x_2,\ x_3) = (8, 3, 1)$$

Remarque Dans chaque tableau, la position qui est soulignée s'appelle le *pivot* du tableau. C'est la position qu'on peut utiliser au pas suivant pour faire disparaitre (remplacer par 0) des nombres au-dessus ou en-dessous du pivot. La méthode qu'on a utilisé s'appelle la *méthode du pivot de Gauss.*

Remarque Il est fortement déconseillé d'essayer de faire plusieurs pas en un seul pour calculer plus vite. On se trompe *très* facilement.

Exemple 2 Le système

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & 5x_5 & = & 19 \\
2x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & 6x_4 & + & 16x_5 & = & 42
\end{array}$$

se résout de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccccc|cl}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & & \\ \hline
\underline{1} & 2 & 1 & 2 & 5 & 19 & \\
2 & 4 & 2 & 6 & 16 & 42 & L_2 \mapsfrom L_2 - 2L_1 \\ \hline
1 & 2 & 1 & 2 & 5 & 19 & \\
0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 4 & L_2 \mapsfrom L_2/2 \\ \hline
1 & 2 & 1 & 2 & 5 & 19 & L_1 \mapsfrom L_1 - 2L_2 \\
0 & 0 & 0 & \underline{1} & 3 & 2 & \\ \hline
1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 15 & \\
0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 &
\end{array}$$

et nous avons déjà vu en Section 6.2 que l'ensemble des solutions du système est

$$\{\ (15 - 2x_2 - x_3 + x_5,\ x_2,\ x_3,\ 2 - 3x_5,\ x_5)\ \mid x_2, x_3, x_5 \in \mathbb{R}\}$$

Remarque Si, dans toutes les équations d'un système d'équations linéaires, le second membre est égal à 0, alors le système a au moins une solution, à savoir la solution triviale $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$. Un tel système d'équations linéaires s'appelle un système *homogène*. Par exemple,

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 5x_5 & = & 0 \\
2x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & 6x_4 & + & 16x_5 & = & 0
\end{array}$$

est un système homogène. On voit immédiatement que $x_1 = 0, \ldots, x_5 = 0$ est une solution. En fait, en comparant avec l'Exemple 2, vous pouvez rapidement trouver l'ensemble de toutes les solutions (exercice !).

Résumé Pour trouver l'ensemble de toutes les solutions d'un système d'équations linéaires donné, il faut d'abord transformer le système en forme échelonnée réduite. En regardant ce système échelonné, on peut distinguer deux cas :

1. Il n'y a aucune solution ("le système est incohérent"). Ceci est le cas si et seulement si, dans le système échelonné, on voit que la dernière colonne ("noire") est plus longue que les autres colonnes ("rouges" et "bleues"). Autrement dit, si et seulement si dans la forme échelonnée on voit une équation du type $0 \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_n = *$, où $*$ est un nombre différent de 0.

2. Il y a des solutions ("le système est cohérent"). On distingue deux sous-cas :

   (a) Il y a exactement une solution. Ceci est le cas si dans le système échelonné la dernière colonne n'est pas plus longue que les colonnes précédentes et en plus il n'y a pas de colonne bleue.

   (b) Il y a beaucoup (en fait, une infinité) de solutions. Ceci est le cas si dans le système échelonné la dernière colonne n'est pas plus longue que les colonnes précédentes et en plus il y a au moins une colonne bleue. Dans ce cas, pour paramétrer l'ensemble des solutions, on utilise les variables correspondants aux colonnes bleues comme variables libres.

6.4 Un point de vue graphique

Regardons l'ensemble des points de coordonnées (x, y) dans le plan tel que l'équation

$$2x + 3y = 0$$

est satisfaite. Il s'agit d'une droite traversant le point $(0, 0)$ et perpendiculaire au vecteur (c.à.d., la flèche) du point $(0, 0)$ vers le point $(2, 3)$ (on peut la comprendre comme le graphe de la fonction $y = -\frac{2}{3}x$).

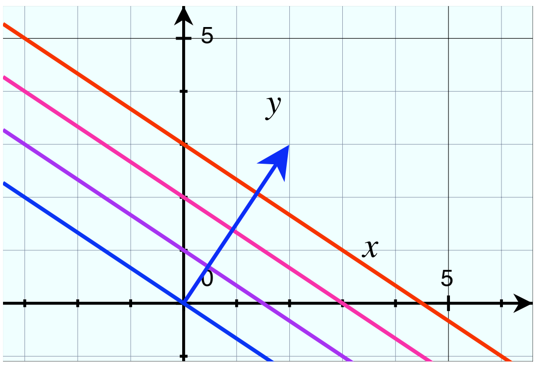


Figure 25: L'ensemble des solutions des équations $2x+3y = 0$ (bleu), $2x+3y = 3$ (violet), $2x + 3y = 6$ (rose), et $2x + 3y = 9$ (rouge).

L'ensemble des solutions de l'équation

$$2x + 3y = c$$

où c est un nombre réel, est de nouveau une droite, qui est parallèle à la droite précédente. On peut la comprendre comme le graphe de la fonction $y = -\frac{2}{3}x+\frac{c}{3}$

Regardons ensuite l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires

$$\begin{array}{ccccc} 2x & + & 3y & = & 9 \\ 3x & - & y & = & 8 \end{array}$$

Un tel point (x, y) doit satisfaire les deux équations, c.à.d. il doit appartenir aux deux droites, il doit être dans l'intersection des deux droites. On voit dans le dessin (et on vérifie facilement par les méthodes de la section 6.3) qu'il y a une unique solution, $x = 3$, $y = 1$ (voir Figure 26(a)).

En revanche, le système

$$\begin{array}{ccccc} 2x & + & 3y & = & 9 \\ 3x & - & y & = & 8 \\ x & - & 2y & = & -2 \end{array}$$

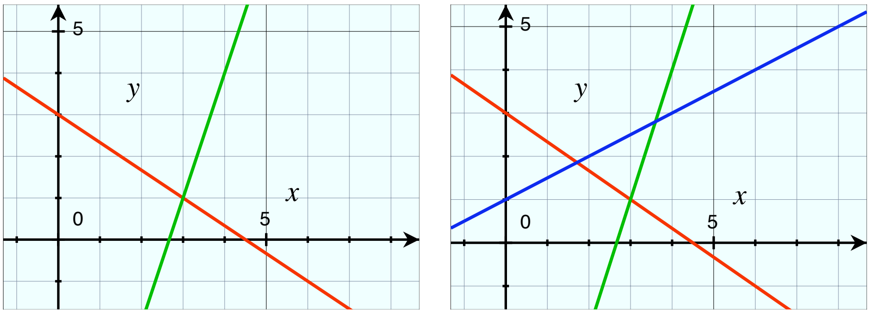


Figure 26: (a) Un système linéaire avec 2 inconnues x, y et deux équations. (b) Avec une troisième équation.

n'a pas de solution – graphiquement, les trois droites ne se rencontrent pas dans un seul point (Figure 26(b)).

Généralisations en dimension supérieure Regardons une équation linéaire avec trois inconnues x, y et z, par exemple

$$x + 2y + z = 15$$

L'ensemble des solutions est un plan dans l'espace $\mathbb{R}^3$, perpendiculaire au vecteur de $(0, 0, 0)$ vers $(1, 2, 1)$. Du coup, rechercher les solutions d'un système de trois équations (comme par exemple notre système "gâteaux") revient à rechercher le point d'intersection de trois plans dans l'espace.

En général, trouver les solutions d'un système avec n inconnues et k équations revient à rechercher les intersections de k hyperplans dans l'hyperespace $\mathbb{R}^n$. Ici l'imagination géométrique devient plus difficile...

7 Programmation linéaire

Dans la section 6 nous avons appris comment trouver les solutions de systèmes d'*équations* linéaires. Dans cette section nous allons regarder des systèmes d'équations *et inéquations* linéaires. On tombe sur des problèmes d'une grande importance pratique.

7.1 Régions du plan définies par des inéquations

Quel est l'ensemble des points (x, y) dans le plan avec $2x + 3y \leqslant 11$? Si vous avez compris la Figure 25, vous saurez que la réponse est : le demi-plan gris dans la Figure 27(a). De façon semblable, l'ensemble des points avec $-x+y \leqslant 2$ est indiqué dans la Figure 27(b).

Donc l'ensemble de tous les points (x, y) satisfaisant les quatre inéquations $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$ et $2x + 3y \leqslant 11$ et $-x + y \leqslant 2$ est l'ensemble gris dans la Figure 28.

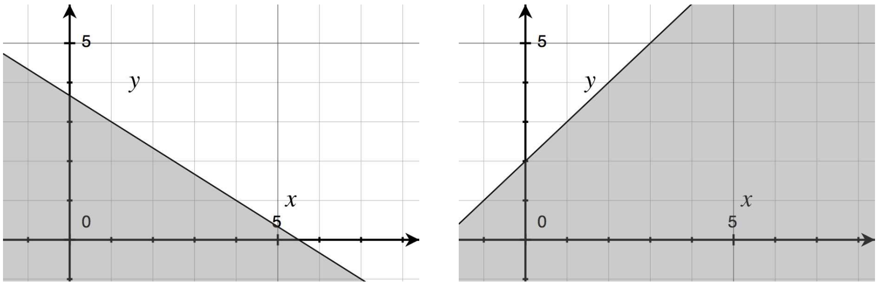


Figure 27: (a) Les points avec $2x + 3y \leqslant 11$ (b) Les points avec $-x + y \leqslant 2$.

7.2 Maximiser des fonctions

Exemple Une entreprise d'importation veut importer deux matériaux : bois et coton. Elle gagne 1€ par tonne de bois importé et 3€ par tonne de coton importé. L'entreprise essaie de maximiser son profit :

$$f(x) = x + 3y \qquad\qquad \text{à maximiser}$$

Or, il y a des contraintes pratiques :

1. Bien évidemment, les quantités importés ne peuvent pas être négatives, donc : $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.
2. Dû à des restrictions de volume des conteneurs, on doit avoir $2x+3y \leqslant 11$
3. À cause d'autres réstrictions pratiques, on exige que $y \leqslant x + 2$ (c.à.d. $-x + y \leqslant 2$).

Quelle quantité x de bois et y de coton doit l'entreprise importer ?

Nous n'allons pas discuter des façons de trouver des réponses à ce genre de question par un calcul algébrique. (En fait, les algorithmes qui répondent à ce genre de question en toute généralité sont assez compliqués.) Nous allons juste discuter comment on peut répondre dans le cas présent, par une simple étude graphique.

L'ensemble des couples (x, y) satisfaisant les 4 restrictions

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad 2x + 3y \leqslant 11 \quad \text{et} \quad -x + y \leqslant 2$$

de l'énoncé a déjà été discuté dans la Section 7.1, il s'agit exactement de la région grise dans la Figure 28.

La Figure 28 montre le problème d'optimisation : pour tout profit P, l'ensemble des points (x, y) où $f(x, y) = P$ est une droite perpendiculaire sur le vecteur de direction $(1, 3)$ (dessiné en bleu). Pour différentes valeurs de P on obtient des différentes droites, toutes parallèles. On cherche à maximiser le profit P, donc on cherche la droite qui est aussi loin que possible dans la direction de la flèche bleue tout en ayant encore au moins un point dans l'ensemble gris.

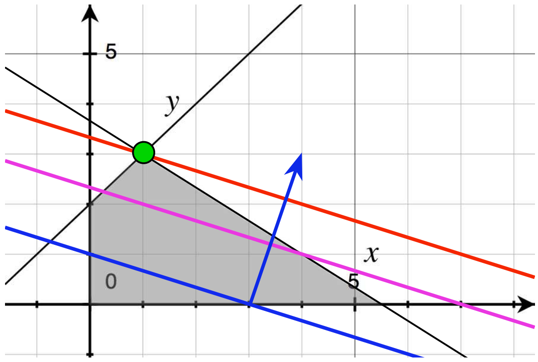


Figure 28: On essaie de maximiser la fonction $f(x, y) = x + 3y$, sous les contraintes que $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $2x + 3y \leqslant 11$ et $-x + y \leqslant 2$. En bleu, l'ensemble des points (x, y) avec $f(x, y) = 3$, en rose les points avec $f(x, y) = 7$, et en rouge les points avec $f(x, y) = 10$. On voit que le point $(1, 3)$ est optimal, f y prend la valeur 10.

On voit que la droite optimale est celle dessinée en rouge, qui touche l'ensemble gris juste en un seul point, le point $(x, y) = (1, 3)$. On a $f(1, 3) = 1 + 3 \cdot 3 = 10$, (et en particulier la droite rouge est l'ensemble des points (x, y) où $f(x, y) = 10$).

Donc, l'importateur a intérêt à importer 1 tonne de bois et 3 tonnes de coton. Avec ce plan, il va faire un profit de 10€.

7.3 Formalisation et généralisations

Définition 7.1 *Un problème de* programmation linéaire *est un problème qui peut être énoncé de la façon suivante : parmi les points* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *de* $\mathbb{R}^n$ *on cherche un où*

- *une certaine fonction* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ *prend une valeur aussi grande que possible*
- *sous la réstriction qu'une liste finie d'inégalités qui sont toutes de la forme* $b_1x_1 + \ldots + b_nx_n \leqslant c$ *doivent être satisfaites.*

Remarque Il existe des algorithmes extrèmement efficaces pour résoudre ce type de question par un calcul purement algébrique (sans étude graphique). Ces algorithmes sont beaucoup trop compliqués pour être discutés dans ce cours.

Remarque Dans la section 7.2 nous avons vu un exemple typique comment resoudre un problème de programmation linéaire dans le cas très simple où $n = 2$, c.à.d., où il n'y a que deux inconnues, x et y. Déjà dans le cas $n = 3$, le domaine de l'espace $\mathbb{R}^3$ défini par un nombre fini d'inéquations sera un polyhèdre convexe dont la forme peut être très compliquée. Donc : s'il y a plus que deux inconnues, laissez faire les ordinateurs !

8 Applications linéaires

8.1 Matrices

8.1.1 Définitions de base

Définition 8.1 *Soient $n \geqslant 1$ et $m \geqslant 1$ deux entiers. Une* matrice *de taille $n \times m$ est un tableau rectangulaire de nombres, avec n lignes et m colonnes, écrit entre parenthèses.*

Attention On n'écrit pas de virgules !

Exemples

$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 1 \\ \frac{5}{6} & \pi \end{pmatrix}$ est une matrice 2×2, $B = \begin{pmatrix} -3 \end{pmatrix}$ est une matrice 1×1,
$C = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice 3×2, $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice 1×4.

Notations On dit une $n \times m$ matrice est *carrée* si $n = m$.

On dit une $n \times m$ matrice est une *matrice colonne* si $m = 1$, c.à.d. si elle a une seule colonne.

On dit une $n \times m$ matrice est une *matrice ligne* si $n = 1$, c.à.d. si elle a une seule ligne.

Exemple Les matrices A et B en haut sont des matrices carrés. La matrice D est une matrice ligne.

Notations Le nombre placé à la $i$ième ligne et $j$ième colonne s'appelle le (i, j)ième coefficient. Pour une matrice A, ce coefficient est noté a_{ij}. Donc on a

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Notations La *matrice identité* I_n est la matrice carré de taille $n \times n$, avec des coefficients $a_{ii} = 1$ partout sur la diagonale, et $a_{ij} = 0$ en dehors de la diagonale. Par exemple,

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La $n \times m$-matrice dont tous les coefficients sont égaux à zéro s'appelle la *matrice nulle* de taille $n \times m$.

8.1.2 Somme de deux matrices

Définition 8.2 *Si A et B sont deux matrices* de la même taille $n \times m$, *alors la somme $A + B$ est la matrice de taille $n \times m$ obtenu par addition coefficient par coefficient.*

Exemple

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ alors $A + B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

Remarque L'addition de matrices est commutative, c.à.d. si A et B sont deux matrices de la même taille, alors $A + B = B + A$.

8.1.3 Multiplication d'une matrice par un nombre

Définition 8.3 *Si α est un nombre ($\alpha \in \mathbb{R}$) et si A est une matrice alors le produit αA est la matrice de la même taille que A dont les coefficients sont égaux aux coefficients de A, multipliés par α.*

Exemple $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -4 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Remarque Par convention, on met toujours le nombre réel *devant* la matrice.

8.1.4 Multiplication de deux matrices

La définition suivante va paraître complètement arbitraire. Nous allons comprendre bientôt pourquoi elle est, en fait, très naturelle.

Définition 8.4 *Si A est une $n \times m$-matrice et B est une $m \times k$ matrice, alors leur produit $A \cdot B$ est une matrice C de taille $n \times k$ dont le (i, j)ième coefficient est*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{im}b_{mj}$$

Aide-mémoire/Calcul pratique Pour calculer le produit $C = A \cdot B$, on écrit la matrice A à gauche et la matrice B en haut, et on calcule comme indiqué dans l'exemple suivant :

Exemple 1 Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ alors $A \cdot B = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 9 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{9}} & 3 & 9 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \end{array}$$

Le coefficient $c_{11} = 9$ est obtenu par le calcul suivant : $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 9$. Le coefficient c_{21} est obtenu par le calcul suivant : $3 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 5$, etc.

Attention Pour que le produit $A \cdot B$ soit défini, il faut que la largeur de A soit égale à la hauteur de B !

Exemple 2 Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors (vérifiez !)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On va comprendre la signification géométrique de ce résultat bientôt, mais remarquons déjà la conséquence suivante :

Attention En général la multiplication de matrices n'est pas commutative :

$$AB \neq BA$$

8.2 Vecteurs et leurs combinaisons linéaires

Définition 8.5 *Un* vecteur *est une matrice-colonne.*

Exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ est un vecteur (de dimension 4).

Interprétation géométrique On identifie habituellement un vecteur de dimension n, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ avec le point dans l'espace $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Par exemple, on ne fait pas la différence entre le vecteur $\binom{1}{2}$ et le point dans le plan avec coordonnées $x = 1$, $y = 2$.

Selon la situation, on l'identifie aussi parfois avec la *flèche* qui commence dans le point de coordonnées $0, \ldots, 0$ et termine dans le point de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$. On a donc l'habitude de jongler avec plusieurs points de vue.

Rappel Nous avons vu dans la Section 8.1.1 la définition de la *somme* de deux matrices (et en particulier de deux vecteurs), et du *produit d'un nombre avec une matrice* (et en particulier avec un vecteur).

Définition 8.6 *Soient $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ des vecteurs appartenant à $\mathbb{R}^n$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des nombres. La* combinaison linéaire *(des vecteurs $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$, avec coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$) est le vecteur*

$$\vec{w} = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \ldots + \lambda_k \cdot \vec{v}_k$$

Exemple (voir Figure 29) Supposons $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Alors la combinaison linéaire $2\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ est égale à

$$2\vec{v}_1 + v_2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

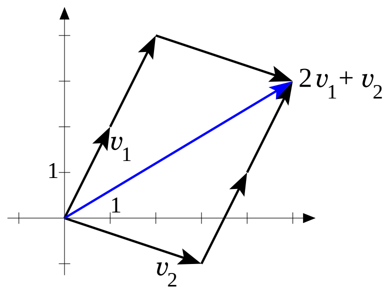


Figure 29: La combinaison linéaire $2 \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

8.3 Applications linéaires

8.3.1 Définition et exemples simples

Rappel Si A est une matrice de taille $n \times m$ et si $\vec{v}$ est un vecteur de dimension m, c.à.d.

$$\text{si} \quad \text{largeur}(A) = \text{hauteur}(\vec{v})$$

alors

$$A\vec{v} \ \text{ est un vecteur de dimension } \ n$$

Exemple Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, alors

$$A\,\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Définition 8.7 *Si A est une $n \times m$-matrice, alors on peut considérer l'application*

$$f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \ \vec{v} \to A\,\vec{v}$$

*Une application $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ obtenue de cette manière s'appelle l'*application linéaire *représentée par la matrice A.*

Exemple 1 La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui est de taille 2×3, représente l'application

$$f\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \\ 3 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \end{pmatrix}$$

Connexion avec les équations linéaires Supposons que je vous me donnez le vecteur $\vec{b} = \binom{3}{9}$ et ma tâche est de

$$\text{chercher un vecteur} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{tel que} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

c.à.d. trouver un vecteur $\vec{v}$ tel que $f(\vec{v}) = \vec{b}$. On observe que ce problème est équivalent au problème de résoudre le système d'équations linéaires

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 9 \end{array}$$

Proposition 8.8 *Pour une $n \times m$-matrice A et un vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ donné,*

$$\textit{l'équation} \quad A\,\vec{v} = \vec{b} \quad \textit{et le système} \quad \left(\begin{array}{c|c} A & \vec{b} \end{array} \right)$$

ont le même ensemble de solutions $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Observation Si A est une $n \times m$-matrice, et si $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$ are les vecteurs colonne de A alors on peut exprimer l'image de l'application linéaire f représenté par A en termes de combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$:

$$f\colon\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \mapsto x_1\vec{w}_1 + \ldots + x_m\vec{w}_m$$

Exemple 1 (cont.) L'application linéaire associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ agit de la façon suivante :

$$f\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notation On note $\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ le vecteur avec 0 partout sauf un 1 dans la $i$ième position.

Comment trouver la matrice A ? En pratique, si je connais les images des vecteurs $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_m$, par une application linéaire f, je peux reconstruire la matrice A de f, en utilisant $f(\vec{e}_i)$ comme $i$ième vecteur colonne de A.

Exemple 2 Il est vrai (mais pas encore évident pour vous) que la rotation du plan $\mathbb{R}^2$ par 90° (ou en fait n'importe quel angle) autour du point $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ dans le sens géométrique est une application linéaire. Si l'on accepte ce résultat pour l'instant, quel est sa matrice ? Nous observons que

$$\text{rotation } 90^\text{o}\colon \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$

Donc l'application

$$\text{rotation } 90^\text{o}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ \text{ est représentée par la matrice } \quad \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

Exemple 3 Dans un restaurant le chef veut calculer le nombre de portions de brocoli et de frites qu'il doit préparer en fonction du nombre de clients. Il sait que chaque adulte mange en moyenne 1 portion de brocoli et 0,7 portions de frites. Il sait que chaque enfant mange en moyenne 0,1 portions de brocoli et 2 portions de frites. Trouver le vecteur $\begin{pmatrix}\text{brocoli}\\\text{frites}\end{pmatrix}$ en fonction du vecteur $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{adultes}\\\text{enfants}\end{pmatrix}$! La réponse est

$$\begin{pmatrix}\text{brocoli}\\\text{frites}\end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix}1\\0,7\end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix}0,1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0,1\\0,7 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Exemple 4 (voir l'Exemple dans la Section 8.2) L'application linéaire associée à la matrice $A = \begin{pmatrix}1 & 3\\2 & -1\end{pmatrix}$ et dessinée dans la Figure 30.

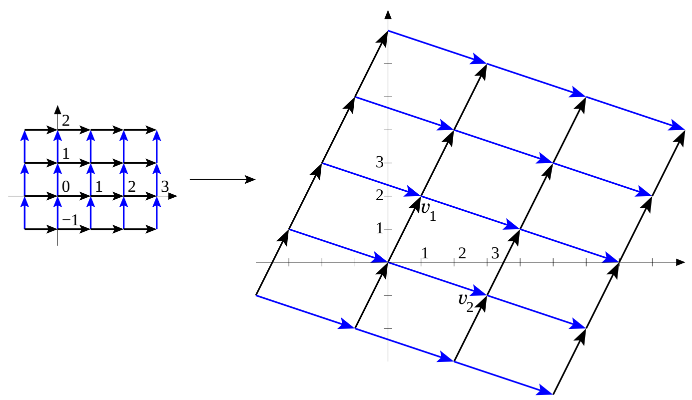


Figure 30: L'application linéaire donnée par la matrice $\begin{pmatrix}1 & 3\\2 & -1\end{pmatrix}$

Exercice Trouver les matrices des applications linéaires $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ suivantes :
(a) Projection orthogonale sur l'axe x. **(b)** Réflexion dans l'axe x.

Proposition 8.9 (Propriétés algébriques d'applications linéaires) *On peut caractériser les applications linéaires* $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *parmi toutes les applications* $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *par le fait que pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et tout* $\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^m$

1. $f(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot f(\vec{v})$
2. $f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)$

Proposition 8.10 (Propriétés géométriques d'applications linéaires) *On peut caractériser les applications linéaires* $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *parmi toutes les applications* $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *par le fait que*

1. *elles envoient* $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ *sur* $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$*, et*
2. *elles envoient des droites sur des droites ou des points.*

Rappel La *matrice identité* I_n est la matrice carrée $n \times n$ qui a des 1 sur la diagonale et des 0 en-dehors de la diagonale. Par exemple,

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous observons que l'application linéaire associée avec la matrice I_n est l'application identité sur $\mathbb{R}^n$, c.à.d. l'application qui ne fait rien du tout :

$$id\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \vec{x} \mapsto \vec{x}$$

8.3.2 Composition d'applications linéaires

Dans cette section on verra que la multiplication de matrices, qui semblait si peu naturelle dans la Section 8.1.4, correspond en fait à la *composition* d'applications linéaires.

Lemme 8.11 *La multiplication de matrices est associative, c.à.d., si* A*,* B*,* C *sont trois matrices telles que*

- *largeur*(A) =*hauteur*(B) *et*
- *largeur*(B) =*hauteur*(C)

alors

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

Nous n'allons pas démontrer ce résultat, mais l'illustrer dans un exemple (comparez avec l'Exemple 1 de la Section 8.1.4) :

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } C = \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

alors

$$\begin{aligned}
A \cdot (B \cdot \vec{x}) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + 0x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 1x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2)x_1 + (1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1)x_2 + (1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3)x_3 \\ (3 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 2)x_1 + (3 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1)x_2 + (3 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 3)x_3 \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\
&= (A \cdot B) \cdot \vec{x}
\end{aligned}$$

Résumé Nous avons deux applications linéaires, données par les matrices A et B :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{B} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^2 & \\ \vec{x} & \mapsto & B \cdot \vec{x} & \mapsto & A \cdot (B \cdot \vec{x}) & = (A \cdot B) \cdot \vec{x} \end{array}$$

Nous voyons que la *composition* des deux applications est donnée par le produit des deux matrices, c.à.d. par la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 9 & 3 & 9 \\ 5 & 7 & 9 \end{smallmatrix}\right)$. En général

Proposition 8.12 *Soit $g\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ donné par une $m \times k$-matrice B et soit $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ donné par une $n \times m$-matrice A :*

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^k & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \\ \vec{x} & \mapsto & B \cdot \vec{x} & \mapsto & A \cdot (B \cdot \vec{x}) \end{array}$$

Alors la fonction composée

$$\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n, \ \vec{x} \mapsto f(g(\vec{x}))$$

est donnée par la $n \times k$-matrice $A \cdot B$.

Attention à l'ordre de multiplication : si l'on applique d'abord la matrice B et après la matrice A, alors la composition est donnée par la matrice $A \cdot B$!

Exemple Reprenons l'Exemple 2 de la Section 8.1.4 : $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Nous observons que A représente la rotation du plan par un angle de 90° dans le sens géométrique, et que B représente la réflexion dans l'axe y. Nous rappellons que $A \cdot B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $B \cdot A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Or, un petit peu d'expérimentation suffit pour se convaincre qu'effectuer d'abord la réflexion et ensuite la rotation (application représentée par $A \cdot B$) ne donne pas le même résultat qu'effectuer d'abord la rotation et ensuite la réflexion (application représentée par $B \cdot A$).

Le fait que $A \cdot B \neq B \cdot A$ dans ce cas précis a donc une explication géométrique intuitive.

Attention Pour deux matrices A et B il peut arriver que leur produit $A \cdot B$ est égal à la matrice nulle bien que ni A ni B soit nulle ! Par exemple,

$$\text{pour} \quad A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{on a} \qquad A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

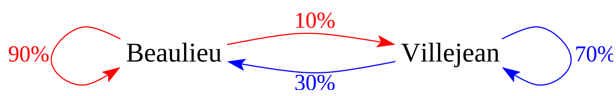
Résumé Il y a deux différences importantes entre la multiplication de matrices et la multiplication de nombres :

- Multiplication de matrices n'est pas commutative
- Pour des matrices, $A \cdot B = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$.

8.4 Une application : chaînes de Markov

8.4.1 Exemple simple d'une chaîne de Markov

Supposons que le système de vélos à la carte de la ville de Rennes n'a que deux bornes : Beaulieu et Villejean. Il y a 100 vélos en total. Chaque jour on a les "mouvements" suivants :



Les flèches indiquent quelle proportion des vélos transite vers l'autre site et quelle proportion reste (ou revient dans la journée) sur place. Si, un certain jour, on a une distribution

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{vélos à Beaulieu} \\ \text{vélos à Villejean} \end{pmatrix}$$

alors le jour suivant, on a une distribution

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,3 \\ 0,1 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

La 2×2 matrice $A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,3 \\ 0,1 & 0,7 \end{pmatrix}$ s'appelle la *matrice de transition.*

Dans notre exemple, la suite des distributions jour après jour, si l'on commence avec tous les 100 vélos concentrés à Villejean, est

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 100 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 30 \\ 70 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 48 \\ 52 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 58,8 \\ 41,2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 65,28 \\ 34,72 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 69,168 \\ 30,832 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \dots$$

Question Quel est le comportement à long terme ?

Réponse La suite converge vers une certaine distribution stable

$$\vec{v}_* = \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \end{pmatrix} \quad \text{telle que} \quad A\vec{v}_* = \vec{v}_*$$

Calcul de la distribution stable

$$\begin{pmatrix} 0,9x_* + 0,3y_* \\ 0,1x_* + 0,7y_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0,9x_* - x_* + 0,3y_* \\ 0,1x_* + 0,7y_* - y_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -0,1x_* + 0,3y_* \\ 0,1x_* - 0,3y_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous savons resoudre cette équation linéaire homogène ! La solution générale est que y_* est une variable libre et

$$x_* = 3 \cdot y_*$$

En plus nous avons par hypothèse que $x_* + y_* = 100$, donc $3y_* + y_* = 100$, et nous obtenons la réponse

$$y_* = 25 \quad \text{et} \quad x_* = 75$$

Au long terme, il y aura donc 75 vélos à Beaulieu et 25 à Villejean.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 100 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 30 \\ 70 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 48 \\ 52 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} 58,8 \\ 41,2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \ldots\ldots \quad \text{limite } \vec{v}_* = \begin{pmatrix} 75 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Interprétation en termes de probabilité Si un vélo particulier se trouve, un certain jour, à Villejean, alors la probabilité que ce vélo particulier se trouve toujours ou de nouveau à Villejean 3 jours plus tard est de 41,2%.

8.4.2 Exemple plus compliqué d'une chaîne de Markov

Plutôt que donner la définition abstraite d'une chaîne de Markov, nous allons montrer un exemple typique d'un tel objet. Regardons la Figure 31. On y voit un graphe dont les arêtes sont orientées et étiquetées par des nombres. Pour chaque sommet, la somme des étiquettes des flèches sortant du sommet est égal à 1. Chaque étiquette représente la probabilité de transition d'un sommet vers un autre en un intervalle de temps.

Nous observons que la matrice de transition est

$$A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,7 & 0 & 0,2 \\ 0,3 & 0 & 0,3 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0 & 0,4 & 0,8 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,1 & 0 \end{pmatrix}$$

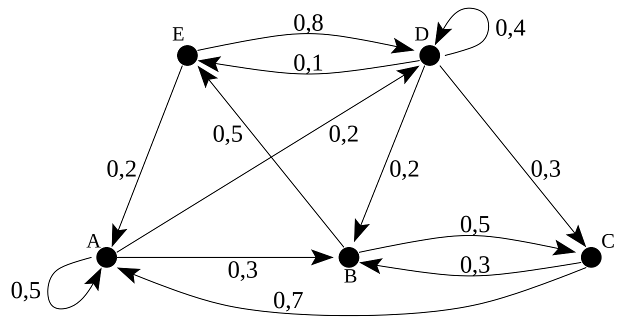


Figure 31: Exemple typique d'une chaîne de Markov.

Condition technique On va s'intéresser aux chaînes de Markov qui ont la propriété que dans des puissance assez élevées $A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$ de la matrice de transition A tous les coefficients sont strictement positifs (> 0).

Cette condition n'a pas beaucoup d'importance – souvenez-vous qu'elle est satisfaite par quasiment toute chaîne de Markov raisonnable.

Théorème 8.13 *Considérons une chaîne de Markov qui satisfait la condition technique mentionnée en haut. Alors il existe une distribution $\vec{v}_*$ telle que pour n'importe quelle distribution initiale $\vec{v}$, la suite des distributions $\vec{v}$, $A\vec{v}$, $A^2\vec{v}$, $A^3\vec{v}, \ldots$ converge vers la distribution $\vec{v}_*$.*

On peut calculer la distribution $\vec{v}_*$: c'est une solution du système d'équations linéaires $A\vec{v}_* = \vec{v}_*$ ou, de façon équivalente, du système homogène

$$(A - I_n)\ \vec{v}_* = 0$$

Dans la dernière équation, I_n note la matrice identité. Par exemple, pour trouver la distribution stable du système en haut, il faudrait résoudre le système

$$\begin{array}{ccccc|c} -0,5 & 0 & 0,7 & 0 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & -1 & 0,3 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & -1 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0 & -0,6 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,1 & -1 & 0 \end{array}$$

C'est embêtant à calculer à la main, mais très facile avec un ordinateur.

9 Exercices

9.1 Logique

Exercice 1 On suppose que A, $\neg B$ et C sont vrais. Déterminez si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.
(a) $(A \vee B) \wedge C$
(b) $B \wedge (A \vee (\neg A))$
(c) $(A \vee B) \Rightarrow (\neg C)$
(d) $(\neg A) \vee (A \wedge C \wedge B)$
(e) $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B \vee C)$

Exercice 2 Donnez la négation des assertions suivantes:
(a) $(A \vee B) \wedge C$,
(b) $(A \wedge B) \vee C$,
(c) $A \Rightarrow (\neg B)$,
(d) $A \Rightarrow (B \wedge (\neg C))$,
(e) $(A \vee B) \Rightarrow C$,
(f) $\forall\, x,\ (A(x) \vee B(x))$,
(g) $\exists\, x,\ (A(x) \Rightarrow B(x))$,
(h) S'il fait beau, je vais la plage ou je mange des glaces, voire les deux.
(i) Tous les oiseaux pondent des oeufs et savent voler.
(j) Tous ceux qui mentent sont aussi des voleurs.

Exercice 3 Donnez la contraposée des implications suivantes:
(a) $(A \vee B) \Rightarrow C$,
(b) $(\neg A) \Rightarrow (A \vee B)$,
(c) $(\forall\, x,\ A(x)) \Rightarrow (\exists\, x,\ B(x))$.
(d) Si tu travailles plus efficacement, tu as plus de temps pour tes loisirs.
(e) Si un seul d'entre vous manque à son devoir, nous y resterons tous.
(f) S'il fait beau, je vais la plage et je mange des glaces.

Exercice 4 Voici l'exemple d'une situation paradoxale dans la vie réelle, où la "logique" quotidienne pas très rigoureuse risque de faire fausse route :

(a) Un effectif de 100 étudiants, composé de 40 filles et 60 garçons, suit une formation. À la fin de l'année, 30 filles et 50 garçons obtiennent leur diplôme. Comparer le pourcentage de réussite des filles avec celui des garçons.
(b) Cette formation comporte en fait deux filières, une filière A et une filière B. Dans la filière A, il y a 35 filles d'inscrites dont 25 reçues, et 30 garçons dont 21 reçus. Comparer le pourcentage de réussite des filles avec celui des garçons dans la filière A.
(c) De même avec la filière B.
(d) Expliquez pourquoi ce résultat peut être qualifié de "paradoxal".

Exercice 5 Dans un esprit semblable, regardons des situations paradoxales dans des élections (paradoxe de Condorcet) : il y a une élections avec trois candidats qui s'appellent A, B, et C. Dans un sondage, on demande aux électeurs de classer les candidats par ordre de préférence. Les résultats sont :

$$\begin{aligned} A > B > C &: 34\% \\ B > C > A &: 33\% \\ C > A > B &: 33\% \end{aligned}$$

(Pour simplifier la question, on suppose que les préférences $A > C > B$, $B > A > C$ et $C > B > A$ n'apparaissent pas.) Si pendant l'élection chaque électeur vote pour son candidat préféré, alors le candidat A gagne (34% des voix). Expliquez pourquoi candidats B et C peuvent néanmoins argumenter que le résultat est injuste.

9.2 Fonctions

Rajouter !

Exercice Insérer un exo sur les conversions, règle des trois

Exercice 6 Dans un importateur de lecteurs DVD, le prix par unité est relié à la quantité achetée Q par $P = -0,01 \cdot Q + 127$; en effet, pour une quantité importante, le prix unitaire est plus faible (ristourne). On désire obtenir un prix de 100€. Quelle quantité doit-on acheter ?

Exercice 7 Supposons que si le prix d'une montre est de 80€, alors personne veut l'acheter. Si elle est gratuite, la demande est de 200 montres. Supposant que l'équation de la demande est une équation affine, quelle est l'équation de la demande ? La représenter graphiquement.

Exercice 8 Supposons que les courbes d'offre et de demande sont

$$\begin{aligned} \text{offre} &: \quad y = x^2 + 5x + 2 \\ \text{demande} &: \quad y = -2x^2 + 3 \end{aligned}$$

Trouver l'équilibre du marché.

Exercice 9 Une entreprise familiale d'importation de chaussures cherche à maximiser son bénéfice. On notera N le nombre de paires de chaussures vendues pendant l'année.
(a) Sachant que le nombre de paires de chaussures vendues en fonction du prix de vente unitaire U est de

$$N = 30 \cdot (100 - U),$$

exprimer les recettes (produit des ventes) R de l'entreprise en fonction du prix unitaire U.
(b) Sachant que l'entreprise a des coûts fixes annuels de fonctionnement de 60000€, et que les chaussures sont achetées 7€ la paire chez le fournisseur,

écrire la relation entre les coûts annuels C et le prix unitaire des chaussures U.
(c) Exprimez le bénéfice net annuel $B = R - C$ en fonction du prix unitaire.
(d) Pour quel(s) prix l'entreprise fait-elle une bénéfice nul ? Quelle zone de prix doit viser l'entreprise pour faire du bénéfice ?
(e) Quel prix maximise le bénéfice de l'entreprise ? Calculer dans ce cas le volume de chaussures, ainsi que le bénéfice.

Exercice 10 Trouver les racines des polynômes suivants.
(a) $2x^3 + 10x^2 + 12x$ (b) $x^4 - 10x^2 + 9$ (c) $x^2 + 3x + 4$

(Dans la question (c) il n'y a pas de racine, mais vous pouvez néanmoins trouver le minimum de la fonction et son intersection avec l'axe y.)

Exercice 11 Démontrer que $x^2 = x \cdot x$. (Rappelez-vous qu'on a défini $x^2 := \exp(2 \cdot \ln(x))$.)

Remlacer les exos 12 et 13 par un seul exo qui ne n'utilise pas la notion d'intérets payables plusieurs fois par an. **A changer**

Exercice 12 On dépose 10000€ à un taux annuel de 4%, payables une fois par année. Quelle somme y aura-t-elle après 10 ans ? Si les intérêts sont payables 4 fois par année, quelle somme y aura-t-elle après 10 ans ?

Exercice 13 Une société a un capital C_0 à déposer. Une première banque lui offre 5% d'intérêts payable 2 fois par année. Quel doit être le taux d'intérêt d'une deuxième banque où les intérêts sont payables quatre fois par anneée pour offrir les mêmes prestations que la première banque ?

Exercice 14 (a) Après combien d'années un capital de 10000€ placé à 5% (intérêts annuels) double-t-il ?

(b) Calculer le capital qui, placé à 3% pendant cinq ans a pris une valeur de 6000€.

Exercice 15 (a) Comparer les graphes de $y = 0.2^x$ et $y = 5^x$.

(b) Comparer les graphes de $y = \log_{0,25}(x)$ et $y = \log_4(x)$.

Exercice 16 Pour quels nombres x a-t-on

(a) $-2x \leqslant 6$ (b) $2e^x \leqslant e^{4x}$

9.3 Dérivée de Fonctions

Exercice 17 Calculer les dérivées des fonctions suivantes et trouver les maxima et minima (si elles existent).

(a) $8x^{3/4}$	(b) $e^{\sqrt{x}}$	(c) $e^x \cdot \sqrt{x}$
(d) $\dfrac{3x-2}{2x-3}$	(e) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\frac{-x^2}{2})$	(f) $\ln(\ln(x))$
(g)* $3^{(3^x)}$	(h) $x^{\frac{1}{x}}$	(i) $\frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$

Exercice 18 (cet exercice a été posé pendant le cours) Supposons que la fonction Demande est $f(x) = 400 - 2x$, où x est la quantité produite. Calculer le revenu total et le revenu marginal en fonction de x. Dessiner les graphes des deux fonctions et les interpréter.

Exercice 19 (cet exercice a été posé pendant le cours) Donnez des exemples d'articles pour lesquels, à votre avis, l'élasticité de la demande par rapport au prix est assez importante, et d'autres pour lesquels l'élasticité est plutôt proche de 0.

Exercice 20 La fonction de Demande d'un certain bien est

$$f(x) = 18 - 5x$$

et le coût total de production pour le fabricant est

$$CT(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1 \quad \text{(Est-ce réaliste?)}$$

Comment faut-il choisir la quantité produite x pour maximiser le profit ? (Indication : Le profit total PT se calcule $PT(x) = RT(x) - CT(x)$, où le revenu total est donné par $RT(x) = x \cdot f(x)$ – ceci a été vu en cours.)

Exercice 21 Supposons que, pour un certain produit, le nombre d'exemplaires vendus dépend du prix p par la fonction

$$f(p) = 20000 \cdot \sqrt{100 - p}$$

(a) Calculer l'élasticité $\mathcal{E}_f$ en fonction de p.

(b) Si le prix du produit est initialement fixé à 50€, quelle serait, en pourcentage, la diminution des ventes si le prix était augmenté de 2% ?

Exercice 22 (a) (cet exercice a été posé pendant le cours) Déterminez le tableau de variation de $f\colon [-2{,}5,\ 1{,}5] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{4}(x^3 + 3x^2)$. Trouvez également le minimum et le maximum (global) de cette fonction.

(b) Déterminez le tableau de variation de la fonction $f\colon\ ]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$. Indication : nous avons déjà calculé que la dérivée de f est $f'(x) = (1 - \ln(x)) \cdot$

$\frac{1}{x^2} \cdot x^{\frac{1}{x}}$. Attention vous devrez en particulier calculer les limites de f quand $x \to 0^+$ et quand $x \to +\infty$!

Exercice 23 La somme de deux nombres positifs est 100. Trouver le couple de nombres
(a) dont le produit est maximal.
(b) dont la somme des carrés est minimale.

Exercice 24 On rappelle qu'un cylindre est entièrement déterminé par son rayon de base r et sa hauteur h. Quelles doivent être les dimensions d'un cylindre de volume $V = 1$ pour que sa surface total S soit minimale ?

9.4 Suites et Limites

Exercice 25 Déterminez les limites suivantes

(a) $\lim_{n\to+\infty} u_n$, où u_n est la suite $u_n = \exp\left(\frac{3n^3-5n^2+9}{-2n^2+3}\right)$

(b) $\lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{x^3-5x+7}{-x^4-4}\right)$ (c) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x^3+7+\frac{2}{x^2}}$

(d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2} \cdot \sqrt{x^4+2x^3-1}$ (e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x}$

(f) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, où $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \exp(\frac{-1}{x})$

Exercice 26 Soit u_n la suite définie par récurrence : $u_0 = 1$ et $u_n = 3u_{n-1}+2$. Trouvez une formule pour u_n en fonction de n.

Exercice 27 Vous prenez un crédit de 30000€ avez un taux de 8%, à remboursements *annuels*,

(a) Vous faites des remboursements annuels de 4800€. Montrez que la durée du crédit sera de 9 ans. Quel sera le coût total du crédit dans ce cas ?

(b) Quel est le montant des remboursements qu'il faut choisir pour rembourser pendant exactement 10 ans ?

9.5 Algèbre Linéaire

Exercice 28 Trouver les solutions des systèmes d'équations linéaires.

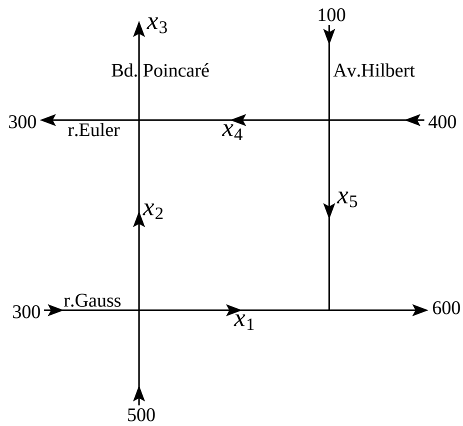
$$\text{(a)}\quad \begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & = & -6 \\ x & + & y & + & z & = & 4 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 11 \end{array} \qquad \text{(b)}\quad \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ x & + & 3y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & y & - & z & = & 2 \end{array}$$

$$\text{(c)}\quad \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ x & + & 3y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & y & - & z & = & -2 \end{array}$$

Exercice 29 Trouver toutes les solutions du système d'équations linéaires

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} -x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & & & = & -10 \\ -x_1 & - & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & -7 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & & & + & 3x_5 & = & 3 \\ 6x_1 & + & 18x_2 & + & 2x_3 & + & 8x_4 & + & 11x_5 & = & -13 \end{array}$$

Exercice 30 Dans une ville il y a un quartier où toutes les rues sont à sens unique. Le réseau de la figure montre comment s'écoule le trafic (en nombre de véhicules par heure) dans ce quartier. En supposant que le flux total rentrant dans le quartier est égal au flux total sortant, calculez le flux dans chaque segment de chaque rue.



Exercice 31 Une entreprise fabrique trois produits, A, B, et C. Produire une pièce du produit A nécessite 2 heures de main d'oeuvre; pour le produit B c'est 3 heures et pour le produit C, 4 heures. Vu le nombre d'employés, l'entreprise peut utiliser 800 heures de main d'oeuvre par jour. Pour les trois produits on a besoin de deux types de matière première, X et Y. L'entreprise peut disposer de 75kg de matière X et de 300kg de matière Y par jour. Les besoins en matière X sont de 300g (pour le produit A), 200g (produit B) et 200g (produit C) par pièce. 1kg de matière Y est nécessaire pour fabriquer une pièce de chaque produit (A, B, ou C). Combien de pièces du produit A, B, et C est-ce que l'entreprise peut fabriquer ?

Exercice 32 Regardons un modèle extrèmement simplifié de l'économie d'un pays. Il y a deux industries : production d'énergie (E) et production de machinerie (M). Les consommateurs du pays ont besoin de 2000 unités d'énergie et de 750 unités de machinerie. Pour pouvoir produire x unités d'énergie, le secteur (E) a besoin de $0{,}1\cdot x$ unités de machinerie (pour construire des centrales électriques, par exemple). Réciproquement, pour construire y unités de machinerie, le secteur (M) a besoin de $0{,}25 \cdot y$ unités d'energie. Calculer le nombre x d'unités d'énergie et y de machinerie qu'on doit produire en total pour satisfaire aux besoins du pays.

Exercice 33 Maximiser la fonction

$$f(x,y) = x + 2y$$

parmi tous les couples de nombres (x,y), sujet aux restrictions

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \qquad 0 \leqslant y \qquad x + y \leqslant 2$$

Exercice 34 On essaie de *minimiser* la fonction

$$f(x,y) = x + y$$

parmi tous les couples de nombres (x,y), sujet aux restrictions

$$3x + y \geqslant 7 \qquad x + 2y \geqslant 4 \qquad x + 6y \geqslant 6 \qquad x + y \geqslant 2$$

Trouver le point (x,y) optimal.

Exercice 35 Calculer le produit de matrices $A \cdot B$ et $B \cdot A$, dans les cas où c'est défini.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Contents