Université de Rennes 1 — Année 2009–2010
UFR Mathématiques
Module ED1

Examen Terminal
Vendredi 16 avril 2010 — Durée : 2 heures

Aucun appareil électronique (calculatrice, téléphone portable...) et aucun document est autorisé. Toutes les réponses devront être justifiées.

Exercice 1 Énoncez le théorème de Cauchy-Lipschitz pour une équation du premier ordre (en dimension 1) $x' = f(t,x)$.

Solution Il y a plusieurs versions plus ou moins fortes du thorme de Cauchy-Lipschitz. Tout énoncé correct d'un théorème sur l'existence locale, et unicité, des solutions d'une équation différentielle du premier ordre obtiendra tous les points.

Exercice 2 Résoudre l'équation d'ordre 2

$$x'' + 2x' + 5x = \cos(2t)$$

Solution : Les racines du polynôme $r^2 + 2r + 5$ sont $-1 \pm 2i$, donc une base de l'espace des solutions de l'équation homogène associée est $\{e^{-t} \cdot \cos(2t), e^{-t} \cdot \sin(2t)\}$. Pour une solution particulière, on a vu en cours qu'il faut deviner qu'il y a une solution de la forme $x_p(t) = A \cdot \cos(2t) + B \cdot \sin(2t)$. Après un petit calcul on tombe sur le système linéaire

$$\begin{aligned} A + 4B &= 1 \\ 4A - B &= 0 \end{aligned}$$

qui a la solution $A = 1/17$, $B = 4/17$. Donc les solutions sont exactement les fonctions de la forme

$$\tfrac{1}{17}\cos(2t) + \tfrac{4}{17}\cos(2t) + \alpha_1 \cdot e^{-t} \cdot \cos(2t) + \alpha_2 \cdot e^{-t} \cdot \sin(2t) \qquad (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R})$$

Exercice 3 Résoudre le système

$$\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}$$

Solution La matrice est triangulaire, donc les valeurs propres sont les termes sur la diagonale. Il y a donc une valeur propre 2, et une valeur propre double 3. Le vecteur propre avec valeur propre 2 est $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, donc on a une solution $\vec{x}_1(t) = e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ Il y a un vecteur propre avec valeur propre 3, à savoir $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, et donc un deuxième solution linéairement indépendante : $\vec{x}_2(t) = e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ Malheureusement, il n'y a pas d'autre vecteur propre linéairement indépendant, donc la matrice n'est pas diagonalisable. Pour trouver la base pour la forme normale de Jordan, on cherche un vecteur $\vec{v}_3$ tel que $(A-3\cdot id)\vec{v}_3 = (1 \;\; 1 \;\; 0)$:

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\vec{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \implies \text{Solution (par exemple) : } \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Il y a donc une troisième solution linéairement indépendante

$$\vec{x}_3(t) = e^{3t}\cdot\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = e^{3t}\cdot\begin{pmatrix}t\\1+t\\1\end{pmatrix}$$

Trouver ce troisième vecteur de base était peut-être la partie la plus difficile de l'examen.

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ Soit (R) l'équation $x' = x^2 - t^2$.

(a) Tracer les isoclines de pente $1, 0, -1$ et -3.

(b) Dessiner le graphe de l'approximation d'Euler de pas $h = 1$ valant -1 en -1, sur l'intervalle $[-1, 2]$.

(c) Esquisser le comportement de la solution $x(t)$ satisfaisant $x(-1) = -1$.

(d) Si $x(t)$ est une solution de (R), montrer que $y(t) = -x(-t)$ en est une, aussi.

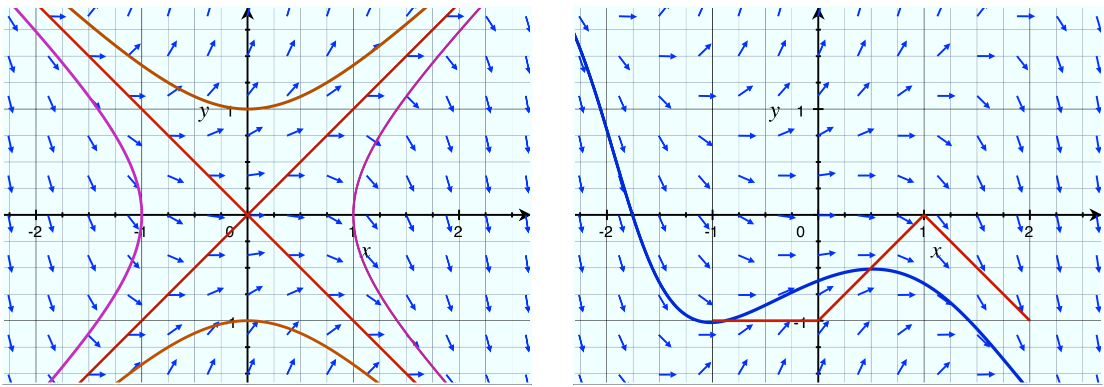

Figure 1 – Gauche : des isoclines. Droite : Une solution exacte et la méthode d'Euler

Solution de (d) : On a $y'(t) = x'(-t)$ et $y^2(t) - t^2 = (-x(-t))^2 - t^2 = x^2(-t) - (-t)^2$. Or par hypothèse, x est une solution, en particulier au moment $-t$ on a $x'(-t) = x^2(-t) - (-t)^2$. On obtient $y'(t) = y^2(t) - t^2$, c.q.f.d.

Exercice 5 Considérons le système

$$\begin{cases} x' &= \frac{2}{t}x \\ y' &= x + y \end{cases} \qquad (L)$$

ainsi que l'équation de type Bernoulli

$$z' = \left(\tfrac{2}{t} - 1\right) z - z^2 \qquad (B)$$

(a) Montrer que si $\binom{x(t)}{y(t)}$ est une solution non nulle de (L), alors $z(t) = \frac{x(t)}{y(t)}$ est une solution de (B).

(b) Résoudre (B). Donner ensuite une solution $z(t)$ de (B) telle que $z(1) = 1$.

(c) Résoudre (L).

Solution (a) Si $z(t) = \frac{x(t)}{y(t)}$, alors $z' = \frac{x'}{y} - \frac{xy'}{y^2} = \frac{2}{t}\frac{x}{y} - (\frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}) = (\frac{2}{t} - 1)z - z^2$

(b) Via le changement de variables $u = \frac{1}{z}$, l'équation (B) est équivalente à

$$z' = \left(t - \tfrac{2}{t}\right) u + 1 \qquad (B')$$

L'équation homogène $u' = (t - \frac{2}{t})u$ a des solutions de la forme $u(t) = K \cdot \frac{e^t}{t^2}$. On applique ensuite une variation de la constante, ce qui donne $K'(t) = t^2 \cdot e^{-t}$. Pour calculer la primitive de cette fonction, on doit appliquer deux fois une intégration par parties. La réponse est $K(t) = (-t^2 - 2t - 2) \cdot e^{-t} + C$. On a donc $u(t) = \frac{-t^2-2t-2+C\cdot e^t}{t^2}$ et $z(t) = \frac{t^2}{-t^2-2t-2+C\cdot e^t}$, où $C \in \mathbb{R}$. Finalement, pour que $1 = z(1) = \frac{1}{-5+C\cdot e^1}$, on doit choisir $C = \frac{6}{e}$., c.à.d. $z(t) = \frac{t^2}{-t^2-2t-2+6\cdot e^{t-1}}$.

(c) La première équation $x' = \frac{2}{t}x$ est facile à résoudre, c'est une équation à variables séparables. La solution est $x(t) = A \cdot t^2$ (pour tout $A \in \mathbb{R}$). Pour calculer ensuite $y(t)$ il y a deux possibilités. La première est de dire que $y(t) = \frac{x(t)}{z(t)}$ d'après (a), donc $y(t) = A\cdot(-t^2-2t-2+C\cdot e^t)$ pour $A \in \mathbb{R}$. L'autre possibilité est de dire que $y' = x+y = At^2+y$, et calculer les solutions de cette équation linéaire en utilisant une variation de la constante – le résultat est le même. On obtient donc

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} t^2 \\ -t^2 - 2t - 2 \end{pmatrix} + A \cdot C \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

dans le cas $x(t) \not\equiv 0$. Si $x(t) = 0$ pour tout t, on a les solutions $\binom{x(t)}{y(t)} = \tilde{C} \cdot \binom{0}{e^t}$ Une base de l'espace des solutions est donc $\left\{ \binom{t^2}{-t^2-2t-2}, \binom{0}{e^t} \right\}$

Merci de signaler des erreurs éventuelles à Bert Wiest