Université de Rennes 1 Année 2009–2010
UFR Mathématiques
Module ED1 (S4)

Feuille d'exercices 1

Exercice 1 (Rappel du cours VAR) Soit $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On peut se représenter son graphe comme un relief. Les *courbes de niveau* de ce relief sont définies implicitement par

$$F(t,x) = C$$

Supposons que $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto x(t)$ est une fonction dérivable dont le graphe est inclus dans une courbe de niveau. Montrer que cette fonction satisfait l'équation différentielle

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) \cdot x'(t) \ + \ \frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = 0$$

Exercice 2 (Rappels du cours Analyse 1) Calculez les primitives suivantes (n'oubliez pas de préciser sur quelle intervalle vous cherchez la primitive, ainsi que la constante d'intégration)

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(x^2+x+1)}\,dx$ (c) $\displaystyle\int x^2\sin(x)\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{2+\cos(x)}\,dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{1}{2+\cosh(x)}\,dx$ (f) $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+9}\,dx$

Indications : en (a) et (b), décomposition en éléments simples. Dans la question (b), on pourra en plus faire un changement de variables pour obtenir une intégrale de la forme $\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \mathrm{Arctan}(t)$. Dans (d), penser au changement de variables du type "moitié angle" $t = \tan(x/2)$. La question (e) peut par exemple être résolu avec un changement de variables $t = e^x$, dans (f) on peut changer de variable $x = \sin(t)$, et dans (g) penser à l'Argsh.

Exercice 3 Dans des êtres vivants, la proportion de carbone radioactif C^{14} par rapport au carbone stable C^{12} est maintenue à un certain niveau par un processus biologique compliqué, un processus qui cesse apès la mort de l'individu. Si l'on trouve un squelette de type Neanderthal où la proportion de C^{14} n'est que 6.24% de ce qu'elle serait dans un os d'un être vivant, alors quand cet individu a-t-il vécu ? Et quelle est la demi-vie du carbone C^{14} ? (Remarque : pour résoudre cet exercice, vous devrez regarder vos notes du premier cours en amphi.)

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ Considérons l'équation logistique $x' = ax - bx^2$. Déterminer par un calcul : pour quelles valeurs de x_0 la fonction constante $x(t) = x_0$ est-elle une solution ? (Autrement dit, quelles tailles de population sont "stables" ?) Dessiner approximativement le champ des directions et les isoclines, ainsi que le comportement qualitatif de quelques solutions. Interpréter les solutions en termes démographiques.

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ Dans l'équation différentielle décrivant un seau percé

$$x' = -\frac{a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{x}$$

si au moment $t = 0$ le seau est plein ($x = 1$), combien de temps faut-il pour se vider complètement ?

$\boxed{\textbf{Exercice 6}}$ Nous considérons les équations différentielles suivantes.

$$\begin{array}{llllll} (a) & x' = x - t & (b) & x' = x^2 & (c) & x' = -x/t \\ (d) & x' = x/t & (e) & x' = x/2t & (f) & x' = t/x \end{array}$$

(a) Pour chacune d'elles, tracer à la main le champ des directions en utilisant les isoclines. Indiquer clairement les points où l'équation n'est pas définie. Tracer quelques solutions compatibles avec le champ de directions.

(b) Sans calcul, essayez de décider s'il y a des solutions avec asymptote verticale. (Dans le cas de (a) et (b) ceci est très difficile.)

(c) Vérifier que pour tout C il y a des solutions donnés par les formules suivantes. Dans chaque cas, déterminez aussi le domaine de définition de ces solutions.

$$\begin{array}{llllll} (a) & x = t + 1 + Ce^t & (b) & x = 1/(C - t) & (c) & x = C/t \\ (d) & x = Ct & (e) & x = C\sqrt{|t|} & (f) & x = \pm\sqrt{t^2 + C} \end{array}$$