Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
Module ED1

Année 2008–2009

Examen Terminal, 26 mai 2009
Durée : 2 heures

Aucun appareil électronique (calculatrice, téléphone portable...) et aucun document n'est autorisé. Toutes les réponses devront être justifiées.

Exercice 1 (a) Donner la définition d'une équation différentielle homogène. Rép : C'est une équation de la forme $x' = g(t/x)$, où $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

(b) Décrire en quelques mots (ou avec un dessin) l'allure des isoclines d'une équation différentielle homogène. Les isoclines sont des (réunions de) droites qui traversent $(0,0)$, car sur deux points (t,x) et $(\lambda t, \lambda x)$ sur une telle droite x' a la même valeur.

(c) Trouver l'ensemble des points d'inflexion des solutions de l'équation $x' = \frac{t^2}{x}$. Rép : en utilisant la formule vue en cours, on trouve $\frac{2tx^2 - t^4}{x^3} = 0$, ce qui est équivalent à ($x = \pm\frac{t^{3/2}}{\sqrt{2}}$ ou $t = 0$).

(d) Réécrire l'équation d'ordre 3

$$x''' - 2tx'' + x - \cos(t) = 0$$

comme système d'équations d'ordre 1. Rép : $x_0' = x_1$, $x_1' = x_2$, $x_2' = 2tx_2 - x_0 + \cos(t)$

(e) Regardons l'équation $x' = \frac{\mathrm{Arctan}(t\cdot x)}{t}$. Démontrer que

$$f\colon [3, +\infty[\;\to\; \mathbb{R}, \quad t \mapsto \ln(t)$$

est une barrière inférieure stricte. En déduire qu'une solution $u(t)$ telle que $u(3) \geqslant \ln(3)$ satisfait $\lim_{t\to\infty} u(t) = +\infty$. On veut démontrer que $\frac{\mathrm{Arctan}(t\cdot\ln(t))}{t} \overset{!}{>} \ln'(t) = \frac{1}{t}$. Il suffit de démontrer que pour $t \geqslant 3$ on a $\mathrm{Arctan}(t \cdot \ln(t)) > 1$. Or, $\ln(t) > \ln(2.71...) = 1$ et donc $t \cdot \ln(t) > 3 > \frac{\pi}{2}$. Pour la deuxième partie de la question, on doit avoir $f(t) > \ln(t)$ pour tout t avec $t \geqslant 3$ (car $f(3) > \ln(3)$ et ln est une barrière inférieure sur cet intervalle). Or, $\lim_{t\to\infty} \ln(t) = +\infty$ et donc on a $\lim_{t\to\infty} \ln(t) = +\infty$, aussi.

Exercice 2 Considérons l'équation différentielle

$$x' = 3t^2 \cdot \sqrt{x+1} \qquad (\text{définie en } \; t \in \mathbb{R},\; x \geqslant -1)$$

(a) Montrer que la condition de Lipschitz n'est pas vérifiée sur un domaine de la forme $(t, x) \in [a, b] \times [-1, +\infty[$ (avec $a < b$). Rép : $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \frac{3t^2}{2\sqrt{x+1}}$, ce qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers -1 (si $t \neq 0$). On a vu en cours que ceci implique que la condition de Lipschitz par rapport à x n'est pas satisfaite dans un voisinage d'un point $(t, -1)$ (sauf pour $t = 0$).

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de cette équation. Rép : par séparation des variables on trouve $2\sqrt{x+1} = t^3 + C$, avec $C \in \mathbb{R}$. *Pour t tel que* $t^3 + C \geqslant 0$, ceci est équivalent à $x(t) = \left(\frac{t^3}{2} + C\right)^2 - 1$. Donc les solutions sont x: $[\sqrt[3]{-C}, +\infty[\to \mathbb{R},\ t \mapsto \left(\frac{t^3}{2} + C\right)^2 - 1$.

(c) Exhiber deux solutions satisfaisant $x(0) = -1$. $x_1(t) = -1$ et $x_2(t) = -1$ si $x < 0$ et $= t^6/4 - 1$ si $x > 0$

Exercice 3 (a) Trouver l'ensemble des solutions de l'équation $x''' - 2x'' + x' = 0$. Rép : l'équation caractéristique $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$ est équivalente à $\lambda(\lambda - 1)^2 = 0$. Une base de l'espace de solutions est donc donnée par les trois fonctions $x_1(t) = e^0 = 1$, $x_2(t) = e^t$ et $x_3(t) = t \cdot e^t$.

(b) Trouver l'ensemble des solutions de l'équation $x''' - 2x'' + x' = t$. Rép : $x''' - 2x'' + x' = t \cdot \exp(0 \cdot t)$. Comme 0 est une racine de mulitplicité 1 du polynôme caractéristique et aussi du polynôme t, on doit chercher une solution particulière de la forme $q(t)\exp(0t)$, où q est un polynôme de degré $1 + 1 = 2$. On trouve $q(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t$. Donc les solutions sont $\frac{1}{2}t^2 + 2t + c_1 + c_2 \exp(t) + c_3 \cdot t \cdot \exp(t)$.

Exercice 4 On regarde l'équation différentielle de type Bernoulli

$$x' + 3x + x^2 = 0$$

(a) Quelles sont les solutions constantes ? Sont-elles stables ou instables ? Esquisser le champ des directions. Rép : Solutions constantes ssi $x' = 0$, ce qui est le cas pour $x(t) = 0$ et $x(t) = -3$. La première solution est stable, la deuxième instable.

(b) Trouver toutes les solutions maximales. Par la méthode standard pour une équation de Bernoulli (avec $n = -1$) on trouve $x(t) = \frac{1}{-\frac{1}{3} + C \cdot \exp(3t)}$ définie pour $t \neq -\frac{1}{3}\ln(3C)$

Exercice 5 Résoudre l'équation différentielle

$$t \cdot e^x \cdot x' + e^x - t^2 = 0$$

Indication : essayez le changement de variable $z = t \cdot e^x$. N'oubliez pas de spécifier les domaines de définition des solutions ! Rép : avec $z = t \cdot e^x$ on a $x = \ln(\frac{z}{t})$ et donc $x' = \frac{t}{z} \cdot \frac{z't - z}{t^2} = \frac{z't - z}{zt}$. L'équation s'écrit donc $z \cdot \frac{z't - z}{zt} + \frac{z}{t} - t^2 = 0$, ce qui se simplifie : $z' = t^2$. Les solutions sont $z = \frac{t^3}{3} + C$. Ceci equivaut à $x(t) = \ln\left(\frac{t^2}{3} + \frac{C}{t}\right)$ – si l'argument du logarithme est positif, c.à.d. si $\frac{t^2}{3} + \frac{C}{t} > 0$. Si $C \geqslant 0$ l'ensemble de définition est alors $\mathbb{R}_- \cup [\sqrt[3]{3C}, +\infty[$ et pour $C < 0$, c'est $]-\infty, -\sqrt[3]{-3C}] \cup \mathbb{R}_+$.

Exercice 6 (a) Considérons l'équation différentielle $x' = \frac{t^2}{x}$. En utilisant la méthode d'Euler avec un pas de longueur 1, trouver une valeur approximative pour $u(2)$, où $u(t)$ est la solution satisfaisant $u(-1) = 1$. On a par hypothèse $u(-1) = 1$, et ensuite $u(0) = 1 + 1 \cdot \frac{(-1)^2}{1} = 2$, $u(1) = 2 + 1 \cdot \frac{0^2}{2} = 2$ et $u(2) = 2 + 1 \cdot \frac{1^2}{2} = \frac{5}{2}$.

(b) Par une méthode approximative (Euler, Point milieu, ou Runge-Kutta) un ordinateur a calculé la valeur d'une certaine solution d'une certaine équation différentielle. Les erreurs sont :

Longueur du pas	0, 1	0, 01	0, 001
Erreur	2,05	0,0201	0,000204

Laquelle des trois méthodes était utilisée ? Rép : chaque fois que la taille du pas est divisée par 10, l'erreur est divisée par 100, donc par 10^2 : Erreur$\cong$ 200·pas^2. Quelle est la méthode pour laquelle l'erreur dépend (asymptotiquement) de façon quadratique de la taille du pas ? La méthode du point milieu !