# Étude de fonctions, équations différentielles
# TP2 – Résolutions approchées d'équations différentielles

Le but de ce TP est d'utiliser les schémas numériques de résolution d'Euler et Runge-Kutta pour étudier certaines équations différentielles. Nous allons appliquer les schémas d'Euler et Runge-Kutta à la résolution d'équations que l'on sait résoudre analytiquement afin de comparer le résultat obtenu par la résolution numérique à la solution analytique.

**Exercice 1 - La fonction exponentielle** On considère l'équation différentielle

$$x' = x$$

**(a) Résolution numérique selon Euler** Écrivez un script MATLAB `exp_Euler.m` calculant une solution approchée sur l'intervalle $[0,2]$, selon la méthode d'Euler, avec condition initiale $x(0) = 1$, et avec un pas de taille $h = 1$. (Essayez aussi $h = 0,01$). Tracez sur un graphique cette solution approchée, superposée avec la fonction $\exp(t)$.

**(b) Résolution numérique selon Runge-Kutta** Écrivez un script MATLAB `exp_RK.m` calculant une solution approchée sur l'intervalle $[0,2]$, selon la méthode de Runge-Kutta, avec condition initiale $x(0) = 1$, et avec un pas de taille $h = 0,01$. Tracez sur un graphique cette solution approchée, superposée avec la fonction $\exp(t)$.

**Exercice 2 - Chute d'un corps**

La vitesse d'un corps en chute libre sous la seule action de la pesanteur dans l'atmosphère est donnée par le principe fondamentale de la dynamique. Elle est solution de l'équation différentielle suivante :

$$m\frac{dV}{dt} = -kV^2 + mg$$

avec :

- $V(t)$ en m/s : la vitesse du corps au temps $t$,
- $m$ =70Kg : masse du corps,
- $g$=9,81N/Kg : accélération de la pesanteur,
- $k$=0,27Kg/m : résistance de l'air,
- $0 \leq t \leq 20$s : intervalle de temps sur lequel on cherche la solution,
- $V(0)$=0 : la condition initiale.

**(a) Résolution numérique** Écrivez un script MATLAB `chute_Euler.m` calculant les valeurs approchées, selon la méthode d'Euler, de la solution ayant pour condition initiale $V(0)$=0 sur l'intervalle de temps considéré pour un pas $h = 2$s (*i.e.* $t_{n+1} = t_n + h$). Tracez le graphe de la solution approchée.

**(b) Résolution numérique** Écrivez un script MATLAB `chute_RK.m` calculant les valeurs approchées selon la méthode de Runge-Kutta, et traçant son graphe.

**(c) Résolution analytique** Résolvez l'équation sur une feuille pour la condition initiale donnée. *Indication* : on pourra utiliser séparation des variables.

**(d) Comparaison** Tracez le graphe donnant les valeurs approchées et comparez le au graphe de la solution analytique.

**(e) Analyse de l'erreur** Pour $h = 2$s, 1s, $\frac{1}{2}$s, $\ldots, 2^{-10}$s, on considère l'erreur $\mathrm{E}_E(h)$ et $\mathrm{E}_{RK}(h)$ de la méthode d'Euler et de Runge-Kutta (par rapport à la solution théorique) après une chute d'une durée de 8s. Écrivez des fonctions MATLAB `ErreurE.m` et `ErreurRK` qui créent des plots de l'erreur, avec le pas $h$ sur l' abscisse et l'erreur $E_E(h)$ ou $E_E(h)$ sur l'ordonnée.

**Exercice 3** Écrivez les fonctions MATLAB permettant d'obtenir des valeurs approchées par les méthodes d'Euler et de Runge-Kutta pour la solution de l'équation

$$\frac{dx}{dt} = -tx$$

valant `x0` en `t`$= 0$ sur l'intervalle $[0, 15]$ pour un pas `h` valant $0,3$.

Tracez quelques solutions et comparez-les à la solution exacte obtenue en séparant les variables. Votre ordinateur fait-il du bon boulot ?

**Exercice 4** Écrivez les fonctions MATLAB permettant d'obtenir des valeurs approchées par les méthodes d'Euler et de Runge-Kutta pour la solution de l'équation

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - t$$

valant `x0` en `t`$= 0$ sur l'intervalle $[0, 17]$ pour un pas `h` valant $0,4$.

Tracez quelques solutions et comparez-les au comportement qualitatif obtenu en cours. Votre ordinateur fait-il du bon boulot ?

**Projet (non obligatoire)** Votre ordinateur ne fait que ce que vous lui demandez, il existe des méthodes qui permettent de faire faire à l'ordinateur les calculs d'une meilleur manière que ce que vous lui avez demandé. Cherchez puis testez sur l'exercice 2 la méthode dite "d'Euler implicite". Vous trouverez beaucoup d'information sur cette méthode dans des livres de mathématiques ou sur internet.