Université de Rennes 1
UFR Mathématiques
Module S4, ED1

Année 2008–2009

Feuille d'exercices 2

Exercice 1 Dans des êtres vivants, la proportion de carbone radioactif C^{14} par rapport au carbone stable C^{12} est maintenue à un certain niveau par un processus biologique compliqué, un processus qui cesse apès la mort de l'individu. Si l'on trouve un squelette de type Neanderthal où la proportion de C^{14} n'est que 6.24% de ce qu'elle serait dans un os d'un être vivant, alors quand cet individu a-t-il vécu ? Et quelle est la demi-vie du carbone C^{14} ?

Exercice 2 Considérons l'équation logistique $x' = ax - bx^2$. Déterminer par un calcul : pour quelles valeurs de x_0 la fonction constante $x(t) = x_0$ est-elle une solution ? (Autrement dit, quelles tailles de population sont "stables" ?) Dessiner approximativement le champ des directions et les isoclines, ainsi que le comportement qualitatif de quelques solutions. Interpréter les solutions en termes démographiques.

Exercice 3 Dans l'équation différentielle décrivant un seau percé

$$x' = -\frac{a\sqrt{2g}}{A}\sqrt{x}$$

si au moment $t = 0$ le seau est plein ($x = 1$), combien de temps faut-il pour se vider complètement ?

Exercice 4 Nous considérons les équations différentielles suivantes.

$$\begin{array}{llllll} (a) & x' = x - t & (b) & x' = x^2 & (c) & x' = -x/t \\ (d) & x' = x/t & (e) & x' = x/2t & (f) & x' = t/x \end{array}$$

(a) Pour chacune d'elles, tracer à la main le champ des directions en utilisant les isoclines. Indiquer clairement les points où l'équation n'est pas définie. Tracer quelques solutions compatibles avec le champ de directions.

(b) Sans calcul, essayez de décider s'il y a des solutions avec asymptote verticale. (Dans le cas de (a) et (b) ceci est très difficile.)

(c) Vérifier que pour tout C il y a des solutions donnés par les formules suivantes. Dans chaque cas, déterminez aussi le domaine de définition de ces solutions.

$$\begin{array}{llllll} (a) & x = t + 1 + Ce^t & (b) & x = 1/(C - t) & (c) & x = C/t \\ (d) & x = Ct & (e) & x = C\sqrt{|t|} & (f) & x' = \sqrt{t^2 + C} \end{array}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ Certaines propriétiés de la fonction $f(t,x)$ induisent des propriétés de symétrie pour l'ensemble des solutions de $x' = f(t,x)$. D'autres propriétés en apparence analogues de $f(t,x)$ n'entaînent aucune symétrie des solutions. Étudions quelques exemples.

(a) Lesquelles des fonctions f de l'exercice 4 ont la propriété que $f(t,x) = -f(-t,x)$? Quelle est la propriété de symétrie correspondante des solutions de $x' = f(t,x)$? (Pas de démonstration formelle demandée.)

(b) Si l'on a $f(t,x) = f(t,-x)$, quelles sont les propriétés de symétrie des solutions de l'équation $x' = f(t,x)$? (Indication : une telle équation a été étudiée en cours.)

$\boxed{\textbf{Exercice 6}}$ Concernant des points d'inflexion des solution d'une équation différentielle : les points d'inflexion d'une solution $x(t)$ d'une équation $x' = f(t,x)$ sont les points qui vérifient $x''(t) = 0$.

(a) Démontrer que les points d'inflexion (t,x) des solutions satisfont

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + f(x,t)\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = 0$$

(Indication : dériver $f(t,x(t))$, en remplaçant $x'(t) = f(t,x)$.)

(b) Appliquer la recette de (a) à l'équation $x' = x^2 - t$, pour trover les points d'inflexion de ses solutions.