

LICENCE

D01 : Fonctions de plusieurs variables, intégrales multiples, courbes paramétrées

Examen Terminal

Deuxième Session

Durée : 2 heures

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par :

$$f(x, y) = \operatorname{Arctan} \left(\frac{y}{x} \right)$$

Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$.

Exercice 2

Calculer le volume de la section sphérique définie par :

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \quad \text{et} \quad 0 \leq z \leq \frac{R}{2}$$

(On pourra utiliser les coordonnées cylindriques (r, θ, z) avec $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$.)

Exercice 3

Soit S la surface $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Chercher les minimum et maximum de la fonction $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ sur cette surface S .

Exercice 4

Soit D le domaine compris entre les courbes $y \geq x^2 - x + \frac{1}{4}$ et $y \leq \frac{5}{4} - x$.

1. Dessiner le domaine D .
2. Calculer son aire.

Exercice 5

Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy$$

où $P(x, y) = (x^2 - y^2)y$ et $Q(x, y) = (x^2 + 3y^2)x$

et où Γ est le segment de droite joignant les points $A = (1, 0)$ et $B = (2, 1)$.