Université de Rennes 1 Année 2007–2008
UFR Mathématiques
Module S4C02

Feuille d'exercices 8

Exercice 1 Le but de cet exercice est de démontrer qu'en général l'implication "partiellement différentiable $\Longrightarrow$ continue" est fausse. Notre contre-exemple sera la fonction

$$f\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 = 0 \ \text{ et } \ x_2 = 0 \\ \frac{x_1 x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Montrer que cette fonction est partiellement différentiable partout, même en $(0, 0)$.

(b) Montrer que la fonction n'est pas continue en $(0, 0)$. (Indication : on pourra considérer la limite de $f(t, t)$ quand t tend vers 0).

Exercice 2 (a) Déterminer l'ensemble des points d'inflexion des solutions de notre équation différentielle préférée, $x' = x^2 - t$.

(b) Sur un seul dessin, dessinez quelques solutions de cette équation différentielle, et avec une autre couleur l'ensemble des points d'inflexion. (J'avoue qu'il est difficile d'obtenir un dessin clair et net.)

Exercice 3 Considérons l'équation

$$x' = \frac{ct - ax}{at + bx}.$$

On remarque que cette équation n'est pas définie sur la droite $at + bx = 0$.

(a) Démontrer qu'il s'agit d'une équation différentielle exacte, et trouver une fonction $F(t, x)$ telle que les solutions de l'équation différentielle suivent des lignes de niveau de la fonction F.

(b) Plus difficile : décrire et dessiner les graphes des solutions. Indication : il faudra distinguer selon le signe de la quantité $a^2 + bc$.

Exercice 4 Considérons un pendule constitué d'une bille de masse m au bout d'une fine tige de longueur ℓ, qui se meut dans un plan vertical (voir figure). Nous observons que l'accélération de la bille est $\ell\theta''$, et la force de la gravité agissant dans la direction tangentielle du mouvement est $-mg\sin(\theta)$, où g est l'accélération terrestre $9,81\frac{m}{s^2}$. On en déduit que ce système est décrit par l'équation différentielle $m\ell\theta'' = -mg\sin(\theta)$, ou encore

$$\theta'' = -K\sin(\theta), \quad \text{où} \quad K = \frac{g}{\ell}$$

De façon équivalente, on a le système

$$\begin{aligned} \theta' &= y \\ y' &= -K\sin(\theta) \end{aligned}$$

(a) Montrer que la quantité

$$E(\theta, y) = \frac{y^2}{2} - K\cos(\theta)$$

est constante sur les trajectoires des solutions dans le plan de phase (θ, y). Quel est le sens physique de cette quantité ?

(b) Dessiner approximativement quelques lignes de niveau de cette fonction E, et expliquer les différentes possibilités pour le mouvement du pendule.

Exercice 5 (a) Exprimer les équations ci-dessous comme systèmes du premier ordre.

$$(i)\ x'' + 3x' + 5x = 0 \qquad (ii)\ x'' + 3tx' = t \qquad (iii)\ x'' + xx' = 0$$

(b) Lorsqu'une équation $f(x'', x', x, t) = 0$ ne dépend pas explicitement d'une des variables x ou t, une méthode classique de résolution consiste à poser $y = x'$. On se ramène alors à une équation du premier ordre :

- si x n'apparaît pas, c.à.d. si l'on a $f(x'', x', t) = 0$, alors on a $f(y', y, t) = 0$
- si t n'apparaît pas, c.à.d. si l'on a $f(x'', x', x) = 0$, on remarque que

$$x'' = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = y\frac{dy}{dx}$$

et on trouve l'équation

$$f(y\frac{dy}{dx}, y, x) = 0$$

Si on sait résoudre l'équation du premier ordre en y, on trouve x par un calcul de primitive. Appliquer cette méthode aux équations de la question (a).

Exercice 6 Tracer à la main l'allure des portraits de phase (dans le plan de phase (x, y) des systèmes ci-dessous. Commencer par tracer les isoclines horizontales et verticales, puis indiquer la direction du champ dans les régions ainsi délimités (NE, NO, SE ou SO). Tracer alors quelques trajectoires typiques compatibles avec ces données.

$$(a) \left\{ \begin{aligned} x' &= x \\ y' &= x - y \end{aligned} \right. \qquad (b) \left\{ \begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y - x \end{aligned} \right. \qquad (c) \left\{ \begin{aligned} x' &= x \\ y' &= (x-y)^2 \end{aligned} \right.$$

$$(d) \left\{ \begin{aligned} x' &= x \\ y' &= x^2 - y^2 \end{aligned} \right. \qquad (e) \left\{ \begin{aligned} x' &= y \\ y' &= x^2 - y^2 \end{aligned} \right. \qquad (f) \left\{ \begin{aligned} x' &= y + x^2 - 1 \\ y' &= x^2 - y^2 \end{aligned} \right.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 7}}$ L'équation de Volterra (vue en TP3) modélise la relation proie-prédateur. Il se peut aussi que deux espèces soient en compétition car devant se partager la même nourriture.

(a) Soient $x(t)$ et $y(t)$ les populations de deux telles espèces. Expliquer en quoi le système

$$\begin{cases} x' &= (a_1 - b_1 x - c_1 y)x \\ y' &= (a_2 - b_2 x - c_2 y)y \end{cases}$$

(où les constantes a_i, b_i, c_i sont positives) modélise l'évolution de ces populations : on repérera les termes provenant de la compétition à l'intérieur de chaque espèce et ceux provenant de la compétition entre espèces.

(b) Seul le quadrant $x > 0$, $y > 0$ nous intéresse. Montrer que les isoclines horizontales et verticales y sont des segments de droites et que la figure montre les quatres cas possibles des positions relatives de ces segments.

(c) Dans chaque cas de figure, déterminer dans chaque région la direction du champ. Tracer des trajctoires orientées compatibles avec ces indications.

(d) Dans chaque cas de figure, interpréter les résultats : est-ce que les deux espèces vont survivre à long terme, ou est-ce que une des deux espèces va s'éteindre ?