Université de Rennes 1
Institut Mathématique
2006–2007

Géométrie différentielle (M1)
Contrôle continu no 2.

Justifiez toutes vos réponses. Durée de l'épreuve : une heure. Tout type de documents et de calculatrices est interdit.

Exercice 1 On considère la paramétrisation de la sphère

$$\varphi\colon \mathbb{R}\times]0,2\pi[\to S^2,\ (u,v)\mapsto \left(\frac{\cos(v)}{\cosh(u)},\ \frac{\sin(v)}{\cosh(u)},\ \tanh(u)\right)$$

(a) Montrer que cette paramétrisation est conforme.

Solution Un calcule montre que la première forme fondamentale est

$$\mathcal{F}_I(\varphi)(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cosh^2(u)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cosh^2(u)} \end{pmatrix}$$

ce qui est un multiple scalaire de la matrice identité. D'après un théorème du cours, on peut conclure que φ est conforme.

(b) Soit $\psi\colon \widetilde{\Omega}\to S^2$ une paramétrisation locale de la sphère telle que les images réciproques de longitudes et de méridiens s'intersectent toujours en angles droits. Peut-on conclure que ψ est conforme ?

Solution Non ! Deux contre-exemples possibles : la paramétrisation d'Archimède, ou la paramétrisation standard. Voici la démonstration pour la paramétrisation d'Archimède : les images réciproques des longitudes et méridiens sont des lignes horizontales et verticales dans le plan. Pour démontrer qu'elle n'est pas conforme, on peut dire qu'elle préserve l'aire (TD), mais elle ne peut pas être une isométrie, donc elle ne peut pas préserver les angles. Il y a d'autres arguments possibles.

Exercice 2(a) Soit $S\subseteq\mathbb{R}^3$ une surface, et soit $\gamma\colon I\to S$ une courbe unitaire. Donner la définition de la courbure géodésique de γ au point $\gamma(s)$.

(b) Énoncer le théorème d'Euler (celui qui parle des courbures principales).

(c) Soit $S\subseteq\mathbb{R}^3$ une surface compacte (sans bord). Démontrer qu'il existe au moins un point x de la surface où $H(x)\neq 0$. (H note la courbure moyenne. Vous avez le droit de citer tous les théorèmes du cours.)

Solution D'après un théorème du cours, il existe au moins un point où la courbure de Gauss est strictement positive. Dans un tel point, les deux courbures principales ont le même signe, donc leur moyenne ne peut pas être nulle.

(d) Considérons la surface de révolution donnée par la paramétrisation

$$\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \sqrt{1+u^2}\cdot\cos(v) \\ \sqrt{1+u^2}\cdot\sin(v) \\ \operatorname{argsinh}(u) \end{pmatrix}$$

(On a déjà vu que la courbe qui engendre cette surface est unitaire). Calculer la courbure de Gauss en chaque point de la surface.

Solution On utilise la formule $K(u,v) = -\frac{f''(u)}{f(u)}$. Elle donne

$$K = -\frac{1}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{1+u^2}} = -\frac{1}{(1+u^2)^2}.$$

Exercice 3 Soit $S \subseteq \mathbb{R}^3$ une surface, et $x \in S$ un point de la surface. Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{v} \mapsto a\vec{v}$ l'homothétie de rapport $a \in \mathbb{R}_+$. Soit $\widetilde{S} = f(S)$ l'image de la surface par l'homothétie. Calculer la courbure $K_{\widetilde{S}}(f(x))$ en termes de $K_S(x)$ et de a.

Solution La réponse est $K_{\widetilde{S}}(f(x)) = \frac{1}{a^2}K_S(x)$. Il y a plusieurs façons très différentes de le démontrer. Par exemple, le résultat est quasiment immédiat si l'on utilise l'interprétation de la courbure comme facteur d'augmentation de l'aire de l'application de Gauss. Alternativement, on peut prendre φ, une paramétrisation locale de S, et $\widetilde{\varphi} := f \circ \varphi$, une paramétrisation locale de $\widetilde{S}$. On a $\widetilde{E} = ||\widetilde{\varphi}_u||^2 = ||a\varphi_u||^2 = a^2||\varphi_u||^2 = a^2E$, $\widetilde{F} = a^2F$, $\widetilde{G} = a^2G$, et $\widetilde{L} = \langle\widetilde{\varphi}_u, \widetilde{N}\rangle = \langle a\varphi_u, N\rangle = aL$, $\widetilde{M} = aM$, $\widetilde{N} = aN$. Donc,

$$K = \frac{\det(\mathcal{F}_{II}(\widetilde{\varphi}))}{\det(\mathcal{F}_I(\widetilde{\varphi}))} = \frac{\det(a\cdot\mathcal{F}_{II}(\varphi))}{\det(a^2\cdot\mathcal{F}_I(\varphi))} = \frac{a^2\det(\mathcal{F}_{II}(\varphi))}{a^4\det(\mathcal{F}_I(\varphi))} = \frac{1}{a^2}\frac{\det(\mathcal{F}_{II}(\varphi))}{\det(\mathcal{F}_I(\varphi))}.$$

Exercice 4 Rappellons qu'une *surface réglée* est, par définition, une surface donnée par une seule paramétrisation locale de la forme

$$\varphi(u,v) = \vec{\gamma}(u) + v\vec{\delta}(u)$$

où $\vec{\gamma}$ et $\vec{\delta}$ sont des chemins C^∞ dans $\mathbb{R}^3$. (En particulier, une surface réglée est une réunion de droites.)

(a) Calculer le coefficient N de la matrice $\mathcal{F}_{II}(\varphi)$.

(b) En déduire que $K\leqslant 0$ en tout point d'une surface réglée.

Solution On trouve immédiatement que $\varphi_{vv}(u,v) = 0$, et donc $N = 0$. Ceci implique que $\det(\mathcal{F}_{II}(\varphi)) = LN - M^2 = -M^2 \leqslant 0$. Comme toujours, on a $\det(\mathcal{F}_I(\varphi)) > 0$. Donc,

$$K = \frac{\det(\mathcal{F}_{II}(\varphi))}{\det(\mathcal{F}_I(\varphi))} \leqslant 0$$