Université de Rennes 1
Institut Mathématique
2006–2007

Géométrie différentielle (M1)
Contrôle continu no 1.

Justifiez toutes vos réponses. Durée de l'épreuve: une heure. Tout type de documents et de calculatrices est interdit.

Exercice 1 Trouver une reparamétrisation unitaire de la courbe planaire

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} s \\ \cosh(s) \end{pmatrix}$$

Trouver une formule aussi simple que possible pour la réponse.

Solution La longueur d'arc entre $\gamma(0)$ et $\gamma(s)$ est $sinh(s)$. Donc une reparamétrisation unitaire est donnée par $\delta(s) = (argsinh(s), cosh(argsinh(s))) = (argsinh(s), \sqrt{1+s^2})$.

Exercice 2 Soit $\gamma(s)$ une courbe paramétrée unitaire sur la sphère de rayon 1 et de centre $(0,0,0)$ dans $\mathbb{R}^3$. Démontrer que la courbure ρ de γ satisfait

$$\forall s,\ \rho(s) \geqslant 1.$$

Solution En dérivant l'égalité $\|\gamma(s)\|^2 = 1$ on obtient $\langle \gamma(s), \gamma'(s) \rangle = 0$ pour tout s. En dérivant encore une fois cette égalité on obtient

$$0 = \langle \gamma(s), \gamma''(s) \rangle + \langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = \langle \gamma(s), \gamma''(s) \rangle + 1$$

On en déduit $1 = |\langle \gamma(s), \gamma''(s) \rangle| \leqslant \|\gamma(s)\| \cdot \|\gamma''(s)\| = \|\gamma''(s)\|$.

Exercice 3 On considère la fonction

$$f\colon\ \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + 4y^2 - 1 \\ 9z^2 + t^2 - 1 \end{pmatrix}$$

(a) Démontrer que l'ensemble $f^{-1}(\binom{0}{0})$ est une variété dans $\mathbb{R}^4$. Quelle est sa dimension ?

Solution On trouve $Df = \begin{pmatrix} 2x & 8y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18z & 2t \end{pmatrix}$. Pour tout $(x, y, z, t) \in f^{-1}(\binom{0}{0})$ on a que x et y ne peuvent s'annuller simultanément ; de façon semblable, z et t ne peuvent s'annuller simultanément. Donc Df est toujours de rang 2, et, d'après un théorème du cours, $f^{-1}(\binom{0}{0})$ est une variété de dimension $4 - 2 = 2$.

(b) De quelle variété s'agit-il (à homéomorphisme près) ? Autrement dit, connaissez-vous un *nom* pour cette variété ?

Solution La variété est de la forme $C_1 \times C_2$, où C_1 est une ellipse dans le plan $x - y$, C_2 est une ellipse dans le plan $z - t$. À homéomorphisme près, il s'agit donc d'un produit de deux cercles, donc un *tore*.

Exercice 4 (a) Si S_1 et S_2 sont deux surfaces, on obtient une nouvelle surface, notée $S_1 \# S_2$, en enlevant un sous-ensemble homéomorphe à un disque ouvert de chacune des deux surfaces et en recollant les bords (voir le dessin). Déterminer $\chi(S_1 \# S_2)$ en termes de $\chi(S_1)$ et $\chi(S_2)$. Justifier la réponse avec un argument qui utilise des triangulations.

Solution La construction peut se faire en enlevant une face de chaque surface triangulée, et en enlevant, en plus, trois sommets et trois arêtes d'une des deux surfaces trianguées, et en recollant ensuite. Donc si l'on utilise la notation s_1, s_2, s pour le nombre de sommets pour les surfaces S_1, S_2 et $S_1 \# S_2$, et de facon semblable a_1, a_2, a, f_1, f_2, f, alors

$$s = s_1 + s_2 - 3, \; a = a_1 + a_2 - 3, \; f = f_1 + f_2 - 2$$

On obtient $\chi(S_1 \# S_2) = s - a + f = s_1 - a_1 + f_1 + s_2 - a_2 + f_2 - 2 = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$.

(b) On considère la sphere S^2, muni de la triangulation comme "icosaèdre gonflé". L'image de cette triangulation par la projection naturelle $S^2 \to \mathbb{R}P^2$ est une triangulation de $\mathbb{R}P^2$ (admis). Déterminer $\chi(\mathbb{R}P^2)$.
Indication : aucun calcul nécessaire.

Solution Si $\widetilde{s}, \widetilde{a}, \widetilde{f}$ sont les nombres de sommets, arêtes et faces dans S^2, et s, a, f dans $\mathbb{R}P^2$, alors $s = \widetilde{s}/2$, $a = \widetilde{a}/2$, $f = \widetilde{f}/2$. Donc $\chi(\mathbb{R}P^2) = s - a + f = \frac{1}{2}(\widetilde{s} - \widetilde{a} + \widetilde{f}) = \frac{\chi(S^2)}{2} = 1$.