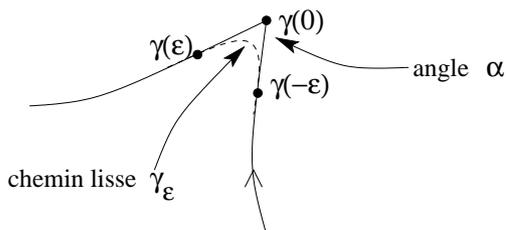


Géométrie différentielle (M1)
 Feuille d'exercices no 8. (Théorème de Gauss-Bonnet)

Exercice 47 Dédurre le “théorème 1' ” du “théorème 1”.



Solution Pour simplifier, on considère un chemin γ avec un seul point de non-dérivabilité (un seul “coin”). Supposons que c’est le point $\gamma(0)$, et que l’angle intérieur en ce point est α . On considère alors une version lissée $\gamma_\epsilon(t)$ du chemin γ qui coïncide avec γ partout sauf pour s entre $-\epsilon$ et ϵ .

On va utiliser les notations de notre démonstration du théorème de Gauss-Bonnet. En plus, on note $\tilde{\theta}(s)$ l’angle entre $\gamma'_\epsilon(s)$ et le vecteur tangent e_1 au point $\gamma_\epsilon(s)$, on note \tilde{R} le disque borné par le chemin γ_ϵ , et $\tilde{\rho}_g$ la courbure géodésique de γ_ϵ . Par le théorème 1 on a

$$\iint_{\tilde{R}} K + \int_{\partial\tilde{R}} \tilde{\rho}_g = 2\pi$$

La première intégrale tend vers $\iint_R K$. D’après notre démonstration du théorème 1 on a pour la deuxième

$$\int_{\partial\tilde{R}} \tilde{\rho}_g = \int_{]-\epsilon, \epsilon[} \tilde{\theta}' + \int_{\partial\tilde{R} \setminus]-\epsilon, \epsilon[} \tilde{\theta}' - \int_{\tilde{R}} K$$

ce qui, pour $\epsilon \rightarrow 0$, tend vers

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{]-\epsilon, \epsilon[} \tilde{\theta}' + \int_{\partial R} \rho_g$$

Il suffit alors de démontrer que

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \tilde{\theta}'(s) ds \rightarrow \pi - \alpha \text{ quand } \epsilon \rightarrow 0$$

Notons $\theta^- = \lim_{s \rightarrow 0^-} \theta(s)$ et $\theta^+ = \lim_{s \rightarrow 0^+} \theta(s)$. On observe que $\theta^+ - \theta^- = \pi - \alpha$. Avec cette notation, $\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \tilde{\theta}'(s) ds = \tilde{\theta}(\epsilon) - \tilde{\theta}(-\epsilon) = \theta(\epsilon) - \theta(-\epsilon)$, et ce dernier terme tend vers $\theta^+ - \theta^- = \pi - \alpha$ quand ϵ tend vers 0.

Exercice 48 Soit S une surface compacte, sans bord dans \mathbb{R}^3 telle que $K \geq 0$ à tout point de S . De quelle surface s'agit-il (à homéomorphisme près) ?

Solution D'après le théorème de Gauss-Bonnet on a $\chi(S) = \int_S K dA \cdot \frac{1}{2\pi} \geq 0$. Donc on sait déjà qu'il s'agit de la sphère ou du tore. Or, d'après un théorème du cours, il existe un point de la surface S où K est strictement positive. Comme la courbure est une fonction continue, il existe toute une région (d'aire positive) où $K > 0$. On a donc $\chi(S) = \int_S K dA \cdot \frac{1}{2\pi} > 0$, et la surface est une sphère.

Exercice 49 Supposons que $\varphi: \Omega \rightarrow S$ est une paramétrisation locale, et que la courbure satisfait $K \leq 0$ en tout point de $\varphi(\Omega)$. Supposons que $D \subset \varphi(\Omega)$ est une région qui est homéomorphe à un disque, et dont le bord est constitué de n segments géodésiques. Montrer que $n \geq 3$.

Solution Soient α_i les angles intérieures dans les coins de la région D ; on a $\alpha_i > 0$. D'après le théorème de Gauss-Bonnet on doit avoir

$$2\pi = \int_S K dA + \sum_{i=1}^n (\pi - \alpha_i) \leq 0 + \sum_{i=1}^n (\pi - \alpha_i) < n \cdot \pi$$

et donc $n > 2$. Comme n est un entier, on conclut que $n \geq 3$.

Exercice 50 Considérons la surface de révolution

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} f(u) \cos(v) \\ f(u) \sin(v) \\ g(u) \end{pmatrix}$$

où $f'(u)^2 + g'(u)^2 = 1$ pour tout u . Soient u_1 et u_2 des nombres réels avec $u_1 < u_2$, et soient $\gamma_i(s)$ ($i = 1$ ou 2) des paramétrisations unitaires des deux parallèles $\{\varphi(u_i, v) \mid v \in [0, 2\pi[\}$. Enfin, soit R la région de \mathbb{R}^2 en forme de rectangle donnée par

$$u_1 \leq u \leq u_2, \quad 0 < v < 2\pi.$$

Calculer

$$\int_0^{\ell(\gamma_1)} \rho_g ds, \quad \int_0^{\ell(\gamma_2)} \rho_g ds, \quad \text{et} \quad \iint_{\varphi(R)} K dA_\varphi,$$

et expliquer les résultats à l'aide du théorème de Gauss-Bonnet.

Remarque En cours je n'ai peut-être pas assez insisté que la courbure géodésique prend des valeurs dans \mathbb{R} (positif ou négatif). En effet, si l'on définit la courbure géodésique par $\rho_g = \langle \gamma'', (\gamma' \wedge \vec{N}) \rangle$ on obtient un nombre réel (pas forcément positif). Mais attention, le signe de ρ_g dépend du choix de signe du vecteur normal \vec{N} , donc il n'est pas très intéressant. Le seul endroit où le signe de ρ_g joue un rôle est dans le

Théorème 1 : Si R est une région homéomorphe à un disque dans la surface S , et si le chemin $\gamma(s)$ fait le tour du bord de R , alors $\int_0^{\ell(\gamma)} \rho_g(\gamma) ds + \int_R K dA = 2\pi$.

J'aurais dû spécifier les conventions de signe : si je regarde la surface du côté tel que les vecteurs normaux pointent vers moi, alors γ doit être paramétrée de telle façon que je vois γ comme courbe dans le sens trigonométrique (contraire aux aiguilles de la montre). Je promets que je ne vais pas vous embêter sur l'examen avec les subtilités de ces signes.

Solution (Modulo erreurs de signe) Avec

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} f(u) \cos(v) \\ f(u) \sin(v) \\ g(u) \end{pmatrix}, \quad \gamma_i(t) = \begin{pmatrix} f(u_i) \cos(\frac{t}{f(u_i)}) \\ f(u_i) \sin(\frac{t}{f(u_i)}) \\ g(u_i) \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2)$$

on a

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} g'(u_i) \cos(\frac{t}{f(u_i)}) \\ g'(u_i) \sin(\frac{t}{f(u_i)}) \\ -f'(u_i) \end{pmatrix}, \quad \gamma'_i \wedge \vec{N} = \begin{pmatrix} -f'(u_i) \cos(\frac{t}{f(u_i)}) \\ -f'(u_i) \sin(\frac{t}{f(u_i)}) \\ -g'(u_i) \end{pmatrix}$$

et donc la courbure géodésique de la courbe γ_i est $\rho_g = \langle \gamma''_i, (\gamma'_i \wedge \vec{N}) \rangle = -\frac{f'(u_i)}{f(u_i)}$. Or, la courbe γ_i est de longueur $2\pi f(u_i)$, et par conséquent

$$\int_0^{\ell(\gamma_i)} \rho_g(\gamma_i) dt = -2\pi f'(u_i).$$

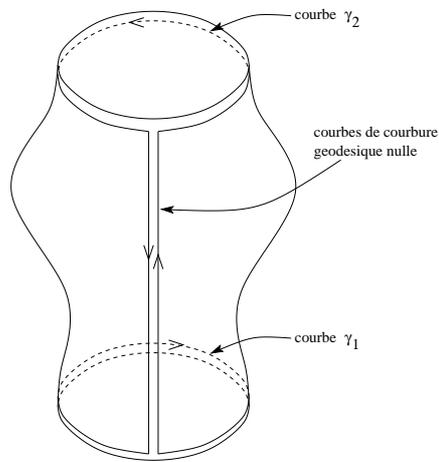
On a déjà calculé $K(u, v) = -\frac{f''(u)}{f(u)}$, d'où

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(R)} K dA &= \iint -\frac{f''(u) \sqrt{\det \mathcal{F}_I(\varphi)}}{f(u)} du dv \\ &= \iint \frac{-f''(u) f(u)}{f(u)} du dv = 2\pi (f'(u_1) - f'(u_2)) \\ &= \int_0^{\ell(\gamma_2)} \rho_g(\gamma_2) dt - \int_0^{\ell(\gamma_1)} \rho_g(\gamma_1) dt \end{aligned}$$

Interprétation en termes du théorème de Gauss-Bonnet : regardons le chemin γ indiqué dans la figure, et le disque R borné par ce chemin. Le chemin est constitué de quatre segments, dont deux géodésiques. Il a aussi quatre "coins", chacun d'un angle intérieur de $\alpha = \pi/2$. Le théorème de Gauss-Bonnet (Théorème 1' du cours) dit en effet que

$$\begin{aligned} 2\pi &= \int \rho_g(\gamma) ds + \sum_{i=1}^4 (\pi - \frac{\pi}{2}) + \int_R K dA \\ &= \int_0^{\ell(\gamma_1)} \rho_g(\gamma_1) dt + 0 - \int_0^{\ell(\gamma_2)} \rho_g(\gamma_2) dt - 0 + 2\pi + \int_R K dA \end{aligned}$$

où les signes négatifs dans la dernière ligne viennent du fait que certains chemins sont traversés dans le sens contraire.



Exercice 51 (Juste pour s’amuser) Donner une démonstration élémentaire de la formule pour le triangle géodésique Δ dans la sphère

$$\text{aire}(\Delta) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$$

Idée de la démonstration Si on trace le prolongement des trois côtés du triangle, on obtient trois grands cercles sur la sphère qui s’intersectent en six points, et découpent la sphère en 8 triangles (faites le dessin !). Un de ces triangles est notre triangle Δ , un autre est isométrique à Δ , c’est le triangle antipodal, qu’on notera $-\Delta$.

Chaque fois qu’on prend deux grands cercles, mais pas le troisième, on obtient un découpage de la sphère en quatre “lunes”, dont deux d’aire $2\alpha_i$, et deux d’aire $2(\pi - \alpha_i)$ (où α_i est l’angle d’intersection des deux grands cercles). On observe que les deux lunes d’aire $2\alpha_1$, avec les deux lunes d’aire $2\alpha_2$ et les lunes d’aire $2\alpha_3$, tous ensemble, recouvrent exactement la sphère, sauf que les triangles Δ et $-\Delta$ sont recouverts trois fois. Donc

$$2 \cdot \sum_{i=1}^3 2\alpha_i = \text{aire}(S^2) + 2 \cdot \text{aire}(\Delta) + 2 \cdot \text{aire}(-\Delta) = 4\pi + 4 \cdot \text{aire}(\Delta)$$

ce qui implique que

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i = \pi + \text{aire}(\Delta)$$