Université de Rennes 1
Institut Mathématique
2006–2007

Géométrie différentielle (M1)
Feuille d'exercices no 7 (surfaces minimales)

Exercice 44 Soit S une surface minimale (sans bord).

(a) Démontrer que S ne peut pas être compacte ?

(b) Soit $P \in S$ un point ombilical. Que peut-on dire des courbures principales $\rho_1(P), \rho_2(P)$?

(c) Soit S une surface minimale ayant $K = 0$ en tout point. De quelle surface s'agit-il ?

Exercice 45 Quand est-ce que le graphe d'une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une surface minimale ?

(a) Montrer que la surface $z = f(x, y)$ est minimale si et seulement si

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0.$$

(b) Montrer que la *surface de Scherk* $z = \ln(\frac{\cos(y)}{\cos(x)})$ est minimale.

Exercice 46 Dans cet exercice on va regarder des surfaces minimales avec une paramétrisation conforme. Supposons que φ est une paramétrisation locale dont la première forme fondamentale est $E(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2)$

(a) Montrer que $\varphi_{uu} + \varphi_{vv}$ est orthogonale à φ_u et φ_v.

(b) Déduire que

$$H \equiv 0 \;\Leftrightarrow\; \varphi_{uu} + \varphi_{vv} \equiv 0.$$

(c) La *surface de Enneper* est donnée par la paramétrisation

$$\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (u, v) \mapsto \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2,\ v - \frac{v^3}{3} + u^2 v,\ u^2 - v^2\right).$$

Démontrer qu'elle est minimale.

(d) On ne devrait pas vraiment parler de la "surface de Enneper" ! Pourquoi ? (Indication : représentez la surface avec un logiciel comme "mathematica" ou "maple".)