Université de Rennes 1
Institut Mathématique
2006–2007

Géométrie différentielle (M1)
Feuille d'exercices no 6 (Géodésiques)

Exercice 39 Démontrer que les seules géodésiques sur la sphère S^2 sont les grands cercles. (Indication : utiliser un théorème d'unicité vu en cours)

Exercice 40 Si P et Q sont deux points distincts sur le cylindre circulaire de rayon 1, décrire toutes les géodésiques qui traversent P et Q. Montrer que, selon la position relative de P et Q, il y en a soit une seule, soit une infinité.

Exercice 41 Dans cet exercice, on va étudier les géodésiques sur les surfaces de révolution S. Nous utilisons la paramétrisation

$$\varphi(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$$

où la courbe $(f(u), g(u))$ est supposée unitaire : $f'^2 + g'^2 = 1$.

On rappelle que $f(u)$ est la même chose que $\rho(u, v)$, la distance entre le point $\varphi(u, v) \in S$ et l'axe de rotation. On rappelle aussi que la première forme fondamentale est $\mathcal{F}_I(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f^2(u) \end{pmatrix}$.

(a) Écrire les équations géodésiques dans ce contexte.

(b) Soit $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ une géodésique unitaire sur S. Soit $\psi(t)$ l'angle entre $\gamma'(t)$ et $\varphi_u(u(t), v(t))$ (voir dessin). Montrer que

$$\rho \cdot v' = \sin(\psi).$$

(c) Démontrer la première partie du théorème de Clairaut :

Théorème *Avec les notations de cet exercice, on a que $\rho \cdot \sin(\psi)$ est constant lelong γ. Réciproquement, si $\rho \sin(\psi)$ est constant lelong une courbe γ, et si aucun segment ouvert de γ fait partie d'une parallèle ($v = \text{const}$) de S, alors γ est une géodésique.*

Exercice 42(a) On considère le chemin

$$\gamma_\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cdot \cos(\frac{t}{\cos(\alpha)}) \\ \cos(\alpha) \cdot \sin(\frac{t}{\cos(\alpha)}) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

sur la sphère de rayon 1. Dessiner ce chemin, et déterminer sa courbure géodésique.

(b)* Expliquer pourquoi un pendule de Foucault qui se trouve à une position géographique d'un angle α au-dessus de l'équateur fait une rotation par un angle de $2\pi\sin(\alpha)$ par jour. Par exemple à Rennes, un pendule de Foucault tourne $360^o \cdot \sin(48^o) = 267,5^o$ par jour.

Exercice 43** Dans cet exercice on va étudier les coordonnées géodésiques polaires sur une surface S. Comme application, on va voir une façon comment un animal vivant dans la surface peut mésurer la courbure K au point $P \in S$.

Soit $P \in S$, et soit $\vec{v} \in T_P S$ un vecteur tangent unitaire. Pour $\theta \in [0, 2\pi[$ soit $\vec{v}_\theta \in T_P S$ le vecteur tangent unitaire qui a un angle de θ avec $\vec{v}$. Soit $\gamma^\theta \colon\ r \mapsto \gamma^\theta(r)$ la géodésique telle que $\gamma^\theta(0) = P$ et telle que $\frac{d}{dr}\gamma^\theta(0) = \vec{v}_\theta$. On admettra qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\varphi(r,\theta)$ est de classe C^∞ pour $-\epsilon < r < \epsilon$ et une paramétrisation locale pour $0 < r < \epsilon$.

(a) Montrer, si $0 < R < \epsilon$, que $\int_0^R \|\frac{d\gamma^\theta}{dr}\|^2 \mathrm{d}r = R$.

(b) Démontrer que $\varphi_r \cdot \varphi_\theta = 0$. (Indication : calculer la dérivée des deux membres par rapport à θ). Déduire que

$$\mathcal{F}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G(r,\theta) \end{pmatrix}.$$

Ce résultat s'appelle le lemme de Gauss. Il dit que le "cercle" de rayon R autour de P est perpendiculaire à tous ses "rayons".

Soit $\widetilde{\varphi}(u,v,)$ une reparamétrisation de $\varphi(r,\theta)$ par $u = r\cdot\cos(\theta)$, $v = r\cdot\sin(\theta)$. On admettra que $\widetilde{\varphi}(u,v)$ est une paramétrisation locale (pour $u^2+v^2 < \epsilon$).

(c) Montrer que $\mathcal{F}(\widetilde{\varphi}) = \begin{pmatrix} \widetilde{E} & \widetilde{F} \\ \widetilde{F} & \widetilde{G} \end{pmatrix}$, où

$$\widetilde{E} = \frac{u^2}{r^2} + \frac{Gv^2}{r^4}, \quad \widetilde{F} = \left(1 - \frac{G}{r^2}\right)\frac{uv}{r^2}, \quad \widetilde{G} = \frac{v^2}{r^2} + \frac{Gu^2}{r^4}.$$

(d) Montrer que $u^2(\widetilde{E}-1) = v^2(\widetilde{G}-1)$. À l'aide d'un développement de Taylor de $\widetilde{E}(u,v)$ et de $\widetilde{G}(u,v)$ autour de $(0,0)$, déduire que

$$G(r,\theta) = r^2 + kr^4 + o(r^4), \quad \text{où } k = -\frac{K(P)}{3}.$$

(e) Soit $S_R^1 \subset S$ le "cercle" de centre P et de rayon R (plus exactement l'image de $\theta \mapsto \gamma^\theta(R)$). Montrer que la circonférence du cercle S_R^1 est

$$c_R = 2\pi R\left(1 - \frac{K(P)}{6}R^2 + o(R^2)\right),$$

et l'aire du disque borné par S_R^1 est

$$A_R = \pi R^2\left(1 - \frac{K(P)}{6}R^2 + o(R^2)\right).$$