Université de Rennes 1
Institut Mathématique
2006–2007

Géométrie différentielle (M1)
Feuille d'exercices no 5. (Appl. de Gauss et Theorema Egregium)

Exercice 32 Déterminer l'image par l'application de Gauss des surfaces suivantes :

(a) $S_1 = \{(u, v, u^2 - v^2) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$

(b) $S_2 = \{(u, v, u^2 + v^2) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$

Dessiner une lettre "R" sur chacune des surfaces, ainsi que leurs images par l'application de Gauss.

Exercice 33 Le but de cet exercice (très facile) est de montrer que la cartographie est une science non-triviale, dans le sens qu'elle n'a pas de "solution optimale": toutes les cartes contiennent forcement une déformation des distances.

(a) Montrer qu'il n'existe pas d'isométrie entre une région de la sphère et une région du plan $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrer qu'il n'y a pas de carte d'une région sur terre qui représente correctement les angles et l'aire.

Exercice 34 Recalculer la courbure de Gauss d'une surface de révolution en utilisant le theorema egregium.

Exercice 35 On considère la paramétrisation du tore T^2

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} (2 + \cos(u)) \cos(v) \\ (2 + \cos(u)) \sin(v) \\ \sin(u) \end{pmatrix}$$

On considère la courbure de Gauss, interpretée comme fonction $K\colon T^2 \to \mathbb{R}$.

(a) Démontrer que $\iint K \, dA_\varphi = 0$. (Le théorème de Gauss-Bonnet va "expliquer" ce résultat.)

(b) Redémontrer le résultat de (a) de la manière suivante: soient S_+ et S_- les régions du tore où la courbure de Gauss est positive/négative. Montrer que $\iint_{S_+} K \, dA_\varphi = -\iint_{S_-} K \, dA_\varphi = 4\pi$.

Exercice 36 On considère la paramétrisation locale d'un ruban de Möbius

$$\varphi(t,\theta) = \begin{pmatrix} (1 - t\cdot\sin(\theta/2))\cos(\theta) \\ (1 - t\cdot\sin(\theta/2))\sin(\theta) \\ t\cdot\cos(\theta/2) \end{pmatrix} \qquad (-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2},\quad 0 < \theta < 2\pi)$$

(a) Montrer que la courbure K est égal à $-\frac{1}{4}$ partout sur le cercle central donné par l'équation $t = 0$. (Remarque : il est nettement plus compliqué de calculer la courbure dans les autres points de la surface.)

(b) Déduire que ce ruban de Möbius ne peut pas être construit avec du papier et de la colle. (Bien évidemment, il y a d'*autres* plongements du ruban de Möbius dans $\mathbb{R}^3$ qui *peuvent* être construit en papier.)

Exercice 37 On considère le caténoïde, muni de la paramétrisation standard

$$\varphi(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \cosh(u)\cos(v) \\ \cosh(u)\sin(v) \\ u \end{pmatrix}$$

Montrer que les seules isométries du caténoïde sont des produits de rotations autour de l'axe z, de reflexions dans des plans contenant l'axe z, et de reflexions dans le plan $x - y$.

Indication : supposons qu'une isométrie f envoie $\varphi(u,v)$ sur $\varphi(\widetilde{u},\widetilde{v})$, où $\widetilde{u} = \widetilde{u}(u,v)$ et $\widetilde{v} = \widetilde{v}(u,v)$ sont des fonctions de u et v. Montrer d'abord que $\widetilde{u} = \pm u$. Puis comparer les PFF de $\varphi\colon (u,v) \mapsto \varphi(u,v)$ et de $f\circ\varphi\colon (u,v) \mapsto \varphi(\widetilde{u}(u,v), \widetilde{v}(u,v))$.

Exercice 38 On considère les paramétrisations locales

$$\varphi(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), \ln(u)) \quad \text{et} \quad \widetilde{\varphi}(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), v).$$

(Le premier représente une surface de révolution, le deuxième représente l'helicoïde).

(a) Démontrer que la courbure de Gauss de φ au point $\varphi(u,v)$ est la même que celle de $\widetilde{\varphi}$ au point $\widetilde{\varphi}(u,v)$, mais que l'application f qui envoie $\varphi(u,v)$ sur $\widetilde{\varphi}(u,v)$ n'est pas une isométrie.

(b)* Démontrer qu'il n'y a pas d'isométrie entre les deux surfaces.