Université de Rennes 1
Institut Mathématique
2006–2007

Géométrie différentielle (M1)
Feuille d'exercices no 4. (SFF et courbure)

Exercice 28 On considère la paramétrisation d'une surface de révolution $\varphi(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$ avec $f(u) > 0$ pour tout u. Calculer sa seconde forme fondamentale $\mathcal{F}_{II}(u,v) = \begin{pmatrix} L(u,v) & M(u,v) \\ M(u,v) & N(u,v) \end{pmatrix}$.

Exercice 29 On considère une surface de révolution, donnée par une paramétrisation locale $\varphi(u,v) = (f(u)\sin(v), f(u)\cos(v), g(u))$ avec $f(u) > 0$ et $f'(u)^2 + g'(u)^2 = 1$ pour tout u.

(a) Calculer la courbure de Gauss K et courbure moyenne H à tout point de la surface.

(b) Dessiner l'exemple du tore ($f(u) = 2 + \cos(u)$, $g(u) = \sin(u)$) et indiquer en couleur les régions où $K > 0$, $K = 0$, et $K < 0$.

(c) Supposons que $K \equiv 0$. Démontrer que la surface est une partie d'un cylindre, d'un cône, ou du plan x-y.

Exercice 30* Soit $\widetilde{\varphi}(\widetilde{u}, \widetilde{v})$ une reparamétrisation d'une paramétrisation locale $\varphi(u,v)$, par une application Φ avec $(u,v) = \Phi(\widetilde{u}, \widetilde{v})$. Montrer que

$$\begin{pmatrix} \widetilde{L} & \widetilde{M} \\ \widetilde{M} & \widetilde{N} \end{pmatrix} = \pm D\Phi^t \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} D\Phi,$$

où l'on prend le signe $+$ si $\det(D\Phi) > 0$ et le signe $-$ si $\det(D\Phi) < 0$.

Exercice 31 Dans cet exercice on considère le *hélicoïde* et le *catenoïde*. Cet exercice est très calculatoire, mais c'est un grand classique de la géométrie différentielle.

(a) Le hélicoïde est la surface réglée qui peut être donnée par la paramétrisation $\varphi(u,v) = (v\cos u, v\sin u, u)$ (pour $u \in \mathbb{R}$, $0 < v < 2\pi$). Décrire ou dessiner cette surface.

(b) Le catenoïde est la surface de révolution avec $f(u) = \cosh(u)$ et $g(u) = u$ (attention, on n'a *pas* $(f')^2 + (g')^2 = 1$!). Dessiner la surface.

(c) Voici une seule paramétrisation locale, qui dépend d'un paramètre α. Pour $\alpha = 0$, on obtient une nouvelle paramétrisation du hélicoïde, et pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ on obtient un catenoïde. Pour $u \in]0, 2\pi[$ et $v \in \mathbb{R}$, on définit

$$\varphi_\alpha(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}) = \cos(\alpha) \begin{pmatrix} \sinh(v)\sin(u) \\ -\sinh(v)\cos(u) \\ u \end{pmatrix} + \sin(\alpha) \begin{pmatrix} \cosh(v)\cos(u) \\ \cosh(v)\sin(u) \\ v \end{pmatrix}$$

Calculer la première forme fondamentale de cette paramétrisation (en fonction de α), et interpréter le résultat géométriquement. Calculer aussi la courbure de Gauss et la courbure moyenne à tout point de la surface.

Exercice 32 (a) On a vu en cours que la *pseudosphère* est la surface de révolution autour de l'axe z de la courbe $z = \sqrt{1-x^2} - \text{argcosh}(\frac{1}{x})$ (cette courbe s'appelle la *tractrice*). Soit (x_0, z_0) un point sur cette courbe. Montrer que le segment de la tangente à cette courbe au point (x_0, z_0), entre le point (x_0, z_0) et son intersection avec l'axe z est toujours de longueur 1.

(b) On considère la paramétrisation de la pseudosphère comme surface de révolution avec

$$f(u) = \frac{1}{u} \quad \text{et} \quad g(u) = \sqrt{1 - \frac{1}{u^2}} - \text{argcosh}(u) \quad (\text{où } u \geqslant 1).$$

Calculer la première forme fondamentale de cette paramétrisation, et interpréter le résultat.