Université de Rennes 1
Institut Mathématique
2006–2007

Géométrie différentielle (M1)
Feuille d'exercices no 3. (Première forme fondamentale)

Exercice 21 On considère la surface dans $\mathbb{R}^3$ qui est l'image de la paramétrisation $\varphi\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto (u, v, 2u^2 + 3v^2)$.

(a) Calculer la PFF de cette paramétrisation.

(b) Calculer l'angle d'intersection entre les courbes $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$, où $u(t) = 1, v(t) = t$, et $\widetilde{\gamma}(t) = \varphi(\widetilde{u}(t), \widetilde{v}(t))$, où $\widetilde{u}(t) = t, v(t) = 2 - t$.

Exercice 22 Calculer la PFF de la paramétrisation de la sphère par coordonnées sphériques $(\theta, \varphi) \mapsto (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$. Utiliser le résultat pour calculer la longueur de la parallèle $\theta = C$ en fonction de C, ainsi que l'aire de S^2.

Exercice 23 Montrer que si l'on transforme une surface par une isométrie de $\mathbb{R}^3$, la PFF ne change pas.

Exercice 24 Montrer que la projection stéréographique est une application conforme.

Exercice 25 Soit f une application $\mathcal{C}^\infty$ d'une surface vers une autre, et supposons que $f$est conforme *et* préserve l'aire. Démontrer que f est une isométrie.

Exercice 26 En cours, on avait défini l'aire de $\varphi(R)$ (où $\varphi\colon\ \Omega \to \mathbb{R}^3$ est une paramétrisation locale et $R \subset \Omega$) par

$$Aire(\varphi(R)) = \int_R \sqrt{\det \mathcal{F}_I}.$$

Montrer que ceci est bien-défini (indépendant du choix de paramétrisation). Autrement dit, si $\Phi\colon\ \widetilde{\Omega} \to \Omega$ est un difféomorphisme, on veut montrer que la paramétrisation $\widetilde{\varphi} := \varphi \circ \Phi$ donne le même résultat.

Exercice 27 Regardons la paramétrisation standard de la sphère

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \cos(u)\cos(v) \\ \cos(u)\sin(v) \\ \sin(u) \end{pmatrix}$$

(a) Calculer sa première forme fondamentale.

(b) On considère l'application F de la sphère, privée des deux pôles, vers le cylindre, donnée par projection radiale, comme indiqué dans la figure.

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ , \ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \ , \ z \right)$$

Démontrer le théorème d'Archimède : l'application F préserve l'aire.

(c) En utilisant le résultat de (b), calculer l'aire de la sphère.