Université de Rennes 1
Institut Mathématique
2006–2007

Géométrie différentielle (M1)
Feuille d'exercices no 2. (Variétés)

Exercice 13 Les deux questions suivantes semblent triviales à première vue, mais elles ne le sont pas ! Le problème est que si $S \subset \mathbb{R}^3$ est une surface, on n'a *pas de notion d'*application de classe C^∞ de S vers $\mathbb{R}^2$! Une stratégie possible dans les deux cas est de considérer une projection de la surface sur le plan $x-y$ (ou $x-z$ ou $y-z$) qui est localement injective.

(a) Soient $\varphi, \widetilde{\varphi}$ deux paramétrisations locales régulières d'une surface de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^3$, et supposons que les images de φ et $\widetilde{\varphi}$ s'intersectent. Démontrer que l'application $\varphi^{-1} \circ \widetilde{\varphi}$ est de classe C^∞.

(b) Soit $\varphi\colon\ \Omega \to \mathbb{R}^3$ une paramétrisation locale régulière d'une surface S de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^3$. Soit $\gamma\colon\ [a,b] \to \varphi(\Omega) \subset S$ une courbe C^∞. Montrer que la courbe $\alpha := \varphi^{-1} \circ \gamma\colon\ [a,b] \to \Omega$ est de classe C^∞.

Exercice 14 (Projection stéréographique) **Dessin:**

(a) Écrire explicitement les applications $\varphi_N\colon\ \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{N\}$ et son inverse, ainsi que φ_S et φ_S^{-1}.

(b) Montrer que $\varphi_N^{-1} \circ \varphi_S\colon\ \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est donné par $(x,y) \mapsto (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$. En déduire que l'atlas $\{\varphi_N, \varphi_S\}$ n'est pas orienté.

(c) Comment peut-on modifier φ_S pour que $D\varphi_N^{-1} \circ D\varphi_S$ préserve l'orientation de $\mathbb{R}^2$?

(d) Montrer que la sphère S^2 n'admet pas d'atlas avec une seule carte.

Exercice 15 Soit $U \subset \mathbb{R}^N$ ouvert, et soit $f\colon\ U \to \mathbb{R}^k$ (où $k < N$) une application de classe C^∞ de telle façon que

$$x \in U, f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{rang} Df(x) = k \ \ \text{(c.à.d., “}Df\text{ est de rang maximal”).}$$

Montrer que $f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^N$ est une variété C^∞ de dimension $N-k$ dans $\mathbb{R}^N$.

Exercice 16 Soit A une matrice appartenant à $SU(2)$ (c.à.d., $A \in M(2\times 2, \mathbb{C})$ est telle que $A^H A = I_2$ et $\det(A) = 1$). Montrer que A est de la forme $\begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$, où $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Montrer que, réciproquement, toute matrice de cette forme appartient à $SU(2)$.

Exercice 17* On a vu en cours que le groupe spécial unitaire $SU(2)$ est homéomorphe à une sphère de dimension 3. Nous observons que le sous-groupe $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}$ est distingué dans $SU(2)$, et nous allons étudier le groupe quotient, qu'on notera $SU(2)/\pm 1$. Le but de cet exercice est de démontrer le résultat suivant :

Il existe un isomorphisme de groupes (qui est aussi un difféomorphisme)

$$SU(2)/\pm 1 \longrightarrow SO(3).$$

En particulier, le groupe $SO(3)$ est homéomorphe à l'espace projectif $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$.

(a) Soit $\mathcal{S} \subset \mathbb{H}$ le groupe des quaternions de norme 1, et soit $E \subset \mathbb{H}$ le sous-espace linéaire engendré par les vecteurs I, J et K. Si $q \in \mathcal{S}$, montrer que l'application linéaire $\mathbb{H} \to \mathbb{H}, v \mapsto qvq^*$ envoie E sur lui-même, et préserve le produit scalaire $\langle v, w\rangle = \frac{1}{2}(v^*w + w^*v)$ sur E.

(b) Pour tout $q \in \mathcal{S}$, soit $\rho(q)$ la matrice qui représente l'application $v \mapsto qvq^*$ par rapport à la base (I, J, K) de E. Montrer que $\rho(q) \in SO(3)$, et que l'application $\rho \colon \mathcal{S} \to SO(3)$ est un epimorphisme avec noyau $\{\pm 1\}$.

(c) Conclure.

Exercice 18 Quel est l'espace obtenu en enlevant un disque ouvert de $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$?

Exercice 19 Soit $T^2 \subset \mathbb{R}^3$ le tore de révolution obtenu en faisant tourner le cercle (contenu dans le plan $x - -z$) de centre $(3, 0, 0)$ et de rayon 1, autour de de l'axe O_z. On consière deux actions du groupe $\mathbb{Z}_2$ (le groupe à 2 éléments) sur T^2 :

(a) $g(x, y, z) = (x, -y, -z)$, rotation de π autour de O_x.

(b) $g(x, y, z) = (-x, -y, z)$, rotation de π autour de O_z.

Dans chaque cas, décrire l'espace quotient $T^2/\mathbb{Z}_2$.

Exercice 20 (a) Dans une triangulation d'une surface compacte, notons f le nombre de faces (triangles), et a le nombre d'arêtes. Démontrer que $f = a \cdot \frac{2}{3}$.

(b) Étant donnés 5 points sur une sphère, montrer qu'il n'est pas possible de lier chaque couple de points par un arc, de telle façon que les arcs sont disjoints (sauf dans leur points extrémaux).

(c) En déduire que le graphe complet à 5 sommets (le graphe avec 5 sommets, qui sont deux-à-deux connectés par une arête) ne se plonge pas dans le plan $\mathbb{R}^2$.