

Université de Rennes 1
Institut Mathématique
2006–2007

Géométrie différentielle (M1)
Feuille d'exercices no 1. (Courbes)

Exercice 1 Soit $\gamma(s)$ une courbe *plane* à paramétrage unitaire. Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

1. La courbure est constante : il existe $R > 0$ tel que $\rho(s) \equiv 1/R$
2. La courbe est un arc de cercle, sur un cercle d'un certain rayon R .

(Une implication est facile, l'autre moins.) En particulier, si l'on roule en voiture sur une surface parfaitement plate, avec le volant tourné à un angle constant, alors on fait des cercles. Est-ce encore vrai si la surface n'est pas plate ?

Exercice 2(a) Soit $\gamma(s)$ une courbe *plane* à paramétrage unitaire. Montrer que

$$\rho(s) = \left| \frac{d\Phi}{ds}(s) \right| \quad \text{où } \Phi(s) = \text{angle entre } T(s) \text{ et le vecteur } (1, 0).$$

(b) Montrer que γ est une droite si et seulement si $\rho \equiv 0$.

Exercice 3 Cet exercice sert à démontrer que toute courbe lisse régulière a un reparamétrage unitaire. Soit $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière, $t_0 \in I$. On considère la fonction

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\| \, du$$

appelée *abscisse curviligne* d'origine t_0 .

(a) Montrer que $s: I \rightarrow s(I), t \mapsto s(t)$ est un difféomorphisme. On notera la réciproque $t: s(I) \rightarrow I, s \mapsto t(s)$.

(b) Posons $\delta(s) = \gamma(t(s))$. Montrer que $\delta(s)$ est un reparamétrage unitaire de $\gamma(t)$.

Exercice 4 Calculer la longueur de la courbe plane $\gamma(t) = (t, \cosh(t))$ pour t entre -1 et 1 .

Exercice 5(a) Trouver la courbure en $(0, 0)$ du graphe de $y = 7x^2 + 8x^3 + 9x^4$.

(b) Plus généralement, démontrer que si une courbe γ dans le plan \mathbb{R}^2 est donné par $\gamma(x) = (x, y(x))$, alors

$$\rho(x) = \frac{|y''(x)|}{(1 + (y'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Exercice 6 Soit $\gamma(s)$ une courbe unitaire dans \mathbb{R}^3 . Si chaque droite tangente à γ passe par le point $(0, 0, 0)$, montrer que γ est une droite.

Exercice 7 Considerons l'hélice sur le cylindre de rayon R et de pente $\frac{\lambda}{R}$, donnée par

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos\left(\frac{s}{c}\right) \\ R \cdot \sin\left(\frac{s}{c}\right) \\ \lambda \cdot \frac{s}{c} \end{pmatrix}, \quad \text{où } c = \sqrt{R^2 + \lambda^2}$$

(a) Montrer qu'il s'agit d'un paramétrage unitaire.

(b) Calculer N, B, ρ , et τ .

(c) Quelle est la torsion maximale qu'une hélice sur un cylindre de rayon $R = 5$ peut avoir ?

Exercice 8 Soit γ une courbe paramétrée unitaire dans \mathbb{R}^3 .

(a) $\rho \equiv 0 \Leftrightarrow \gamma$ est une droite.

(b) $\tau \equiv 0 \Leftrightarrow \gamma$ est une courbe plane.

(c) $\tau \equiv 0$ et ρ constante $\Leftrightarrow \gamma$ est un arc de cercle.

(d)* ρ et τ sont constantes $\neq 0 \Leftrightarrow \gamma$ est une hélice circulaire.

Exercice 9 L'ADN de tous les êtres vivants sur terre est une double hélice, de torsion positive ou négative ?

Exercice 10 (Courbe tracée sur une sphère) Soit γ une courbe paramétrée unitaire dans \mathbb{R}^3 telle que $\rho(t) > 0$ et $\tau(t) \neq 0$.

(a) Si $\gamma(t)$ est sur une sphère de centre \vec{C} et d'un certain rayon R , montrer que

$$\gamma(t) - \vec{C} = \frac{-1}{\rho} \vec{N} + \left(\frac{1}{\rho}\right)' \frac{1}{\tau} \vec{B}, \quad \text{et déduire que } R^2 = \frac{1}{\rho^2} + \left(\left(\frac{1}{\rho}\right)' \frac{1}{\tau}\right)^2$$

(b) Réciproquement, si $\frac{1}{\rho^2} + ((\frac{1}{\rho})' \frac{1}{\tau})^2$ est constante $\equiv 1$, et si $(\frac{1}{\rho})' \neq 0$, montrer que $\gamma(t)$ est sur une sphère de rayon 1.

Exercice 11 Soit γ une courbe paramétrée. Il est souvent utile de pouvoir calculer ρ et τ directement, sans passer par un reparamétrage unitaire de γ . Voici les formules :

$$\rho(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

$$\tau(t) = \frac{-\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t) \rangle}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}$$

Montrer la première. (Indication : une façon possible de procéder est de montrer que la formule est vraie pour des courbes unitaires, et qu'elle est invariante par reparamétrage.)

Exercice 12 Soient $T(s) = (t_1(s), t_2(s), t_3(s))$, $N(s) = (n_1(s), n_2(s), n_3(s))$, et $B(s) = (b_1(s), b_2(s), b_3(s))$ trois courbes dans \mathbb{R}^3 . Supposons que

$$T(0) = (1, 0, 0), \quad N(0) = (0, 1, 0), \quad \text{et} \quad B(0) = (0, 0, 1).$$

Supposons enfin qu'il s'agit d'une solution de l'équation différentielle (à neuf paramètres)

$$\begin{pmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \rho(s) & 0 \\ -\rho(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix}$$

où $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\tau: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions C^∞ . Démontrer que pour tout $s \in \mathbb{R}$, les trois vecteurs $T(s), N(s)$ et $B(s)$ sont de norme 1 et mutuellement orthogonaux. (Indication : on peut remplacer la matrice 3×3 par une matrice antisymétrique arbitraire.)