Université de Rennes 1
UFR de Mathématiques
2006–2007

Géométrie différentielle (G02)
Examen, 22 Décembre 2006

Toutes les réponses doivent être justifiées. Durée de l'épreuve: deux heures.
Tout type de documents et de calculatrices est interdit.

Exercice 1 On considère la courbe

$$\gamma(t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2t - 2\cos(t)) \\ \sqrt{3}\,(t + \cos(t)) + \sqrt{2}\sin(t) \\ -t - \cos(t) + \sqrt{6}\sin(t) \end{pmatrix}$$

(a) Démontrer que la courbe est unitaire.

(b) Calculer la courbure et la torsion de cette courbe en tout point.

(c) Décrire en mots la nature de cette courbe.

Solution (a) $\gamma' = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 + 2\sin(t) \\ \sqrt{3}(1 - \sin(t)) + \sqrt{2}\cos(t) \\ -1 + \sin(t) + \sqrt{6}\cos(t) \end{pmatrix}$, et un petit calcul montre que $\|\gamma'(t)\|^2 = \frac{8+8(\sin^2(t)+\cos^2(t))}{16} = 1$

(b) $\gamma''(t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ -\sqrt{3}\cos(t) - \sqrt{2}\sin(t) \\ \cos(t) - \sqrt{6}\sin(t) \end{pmatrix}$, et $\|\gamma''(t)\|^2 = \frac{1}{2}$. Donc la courbe est de courbure constante $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$, et $\vec{N} = \sqrt{2}\gamma''$. Ensuite on calcule

$$\begin{aligned} \vec{B} = \sqrt{2}\gamma' \wedge \gamma'' &= \sqrt{2}\begin{pmatrix} ??? \\ 2\cos(-1 + \sin + \sqrt{6}\cos) - (2 + 2\sin)(\cos - \sqrt{6}\sin) \\ ??? \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{2}\begin{pmatrix} ??? \\ 2\sqrt{6} + 2\sqrt{6}\sin - 4\cos \\ ??? \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\text{et donc } \vec{B}' = \sqrt{2}\begin{pmatrix} ??? \\ 2\sqrt{6}\cos + 4\sin \\ ??? \end{pmatrix}.$$

On obtient $\vec{B}' = \tau\vec{N}$ avec $\tau = -2\sqrt{2}$.

(c) On a vu que courbure et torsion sont constantes. D'après un théorème du cours on peut déduire qu'il s'agit d'une hélice sur un cylindre dont le noyau est la droite $vect\{(2, \sqrt{3}, -1)\}$.

Exercice 2 On considère une triangulation de la sphère S^2 avec T triangles, de telle façon qu'il y a exactement R triangles adjacents à chaque sommet.

(a) Montrer que le nombre de sommets est $\frac{3T}{R}$.

(b) En déduire que $\frac{2}{T} + \frac{1}{2} = \frac{3}{R}$. (Indication : on rappelle que dans toute triangulation, le nombre d'arêtes est égal à $\frac{3}{2}T$.)

(c) En déduire que $R \leqslant 5$ et décrire en mots (ou dessiner) les triangulations lorsque $R = 3, 4, 5$.

Solutions (a) Si l'on dessine trois points rouge à l'intérieur de chaque triangle, un proche de chaque coin, alors on a, en total, $3T$ points rouges. Or, proche de chaque sommet de la triangulation on aura R points rouges. En total, on aura donc RS points rouges (où S note le nombre de sommets de la triangulation). D'où $SR = 3T$.

(b) On a $2 = \chi(S^2) = S - A + T = \frac{3T}{R} - \frac{3}{2}T + T = \frac{3T}{R} - \frac{1}{2}T$, ce qui équivaut à $\frac{2}{T} = \frac{3}{R} - \frac{1}{2}$.

(c) D'après (b), $\frac{3}{R}$ doit être strictement supérieur à $\frac{1}{2}$, ce qui implique $R \leqslant 5$. Pour $R = 3$ on obtient un tetraèdre gonflé, pour $R = 4$ un octaèdre, et pour $R = 5$ un icosaèdre gonflé.

Exercice 3 On considère le hélicoïde S, donné par la paramétrisation

$$\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} u \cdot \cos(v) \\ u \cdot \sin(v) \\ v \end{pmatrix}$$

Démontrer que les seules isométries $f\colon S \to S$ sont

$$S_\lambda, \quad R_x \circ S_\lambda, \quad R_y \circ S_\lambda \quad \text{et} \quad R_z \circ S_\lambda \qquad (\text{pour } \lambda \in \mathbb{R}).$$

Ici, S_λ note l'application "tourner le vis" $\varphi(u,v) \mapsto \varphi(u, v+\lambda)$, et R_x, R_y et R_z sont les rotations de $\mathbb{R}^3$ par un angle π autour des axes x, y et z.

Solution On a fait deux exercices extrèmement semblables en TD. Étant donné une isométrie f de l'hélicoïde, on définit deux fonction $\widetilde{u}, \widetilde{v}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ en exigeant que $f(\varphi(u,v)) = \varphi(\widetilde{u}(u,v), \widetilde{v}(u,v))$. On calcule la courbure de Gauss au point $\varphi(u,v)$, et on trouve $K = \frac{1}{(1+u^2)^2}$. D'après le theorema egregium, f doit envoyer $\varphi(u,v)$ sur un point de la même courbure, donc $\frac{1}{(1+u^2)^2} = \frac{1}{(1+\widetilde{u}^2)^2}$, c.à.d. $u = \pm\widetilde{u}$.

Ensuite on calcule la PFF de $f \circ \varphi$, et on trouve

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2+1 \end{pmatrix} = \mathcal{F}_I(\varphi) \overset{(*)}{=} \mathcal{F}_I(f \circ \varphi) = \begin{pmatrix} 1 + (u^2+1) \cdot (\widetilde{v}_u)^2 & (u^2+1) \cdot \widetilde{v}_u \cdot \widetilde{v}_v \\ (u^2+1) \cdot \widetilde{v}_u \cdot \widetilde{v}_v & (u^2+1) \cdot (\widetilde{v}_v)^2 \end{pmatrix}$$

où l'égalité $\overset{(*)}{=}$ doit être vraie par l'hypothèse que f est une isométrie.

En comparant les coefficients, on obtient que $\widetilde{v}_u = 0$ et $\widetilde{v}_v = \pm 1$, donc $\widetilde{v}(u, v) = \pm v + \lambda$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. Or,

- l'application $f\colon\ \varphi(u, v) \mapsto \varphi(u, v + \lambda)$ correspond à un vissage par un angle λ,
- l'application $f\colon\ \varphi(u, v) \mapsto \varphi(-u, v)$ correspond à la symétrie dans l'axe z,
- l'application $f\colon\ \varphi(u, v) \mapsto \varphi(u, -v)$ correspond à la symétrie dans l'axe x,
- et l'application $f\colon\ \varphi(u, v) \mapsto \varphi(-u, -v)$ à la symétrie dans l'axe y.

Exerice 4 Supposons que φ est une paramétrisation locale qui est *conforme*.

(a) Montrer que $\varphi_{uu} + \varphi_{vv}$ est orthogonale à φ_u et φ_v.

(b) Déduire que
$$H \equiv 0 \;\Leftrightarrow\; \varphi_{uu} + \varphi_{vv} \equiv 0.$$

(c) Montrer que la *surface de Catalan*
$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} u - \sin(u)\cosh(v) \\ 1 - \cos(u)\cosh(v) \\ -4\sin\left(\frac{u}{2}\right)\sinh\left(\frac{v}{2}\right) \end{pmatrix}$$
pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus (2\pi\mathbb{Z} \times \{0\})$ est minimale.

(d) Montrer que dans la surface de Catalan, la courbe donnée par $u = \pi$ est une géodésique. (Indication : on pourra utiliser le fait que cette courbe représente l'intersection de la surface avec un plan.)

Solutions (a) et (b) ont été faits en TD. Je rappelle l'idée. Exiger que φ soit conforme revient à exiger que dans la PFF de φ on aie $E(u, v) = G(u, v)$ et $F(u, v) = 0$ pour tout u, v. Si l'on dérive les égalités $\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle - \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle = 0$ et $\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle$ par rapport à u et v, on obtient que $\langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle + \langle \varphi_{vv}, \varphi_u \rangle = 0$ et $\langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle + \langle \varphi_{vv}, \varphi_v \rangle = 0$, ce qui implique (a).

(b) On a des équivalences
$$H = 0 \Leftrightarrow EN + 2FM + GL = 0 \Leftrightarrow E(N + L) = 0 \Leftrightarrow N + L = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \langle \varphi_{uu} + \varphi_{vv}, \vec{N} \rangle = 0 \Leftrightarrow \varphi_{uu} + \varphi_{vv} = 0.$$
Dans la troisième équivalence on a utilisé le fait que $E > 0$ pour toute paramétrisation régulière. Dans la dernière équivalence on a utilisé (a).

(c) On doit montrer par calcul que $\langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$, $\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0$ et $\varphi_{uu} + \varphi_{vv} = 0$ pour tout (u, v). Ceci est assez facile si l'on utilise les formules concernant les identités trigonométriques données sur la feuille.

(d) La courbe $u = \pi$ est donnée par intersection de la surface avec le plan $x = \pi$ – ceci est un plan perpendiculaire au vecteur $(1, 0, 0)$. On doit vérifier qu'en tout point de cette courbe, l'intersection du plan avec la surface est orthogonale. (Une fois que c'est vérifié, on peut conclure d'après un théorème du cours que la courbe est une géodésique.) Pour vérifier ceci, on remarque que le vecteur $\vec{\varphi}_u(\pi, v)$ est toujours de la forme $(*, 0, 0)$. Le vecteur normal sur la surface $\vec{N} = \vec{\varphi}_u \wedge \vec{\varphi}_v / \|\vec{\varphi}_u \wedge \vec{\varphi}_v\|$ au point $\varphi(u, v)$ est perpendiculaire sur φ_u ; il est donc contenu dans le plan vectoriel perpendiculaire sur $(1, 0, 0)$. On en déduit que l'intersection du plan $x = \pi$ avec la surface est perpendiculare.

Exercice 5(a) Soit S une surface telle que $K \leqslant -1$ en tout point. On considère un triangle Δ avec des cotés géodésiques dans S. Montrer que le triangle est "mince" dans le sens que

$$\text{aire}(\Delta) < \pi.$$

(b) Soit S une surface compacte, sans bord, dans $\mathbb{R}^3$, qui n'est pas homéomorphe à une sphère. Démontrer qu'il existe au moins un point de S où l'on a $K < 0$.

Solution (a) était une question de cours (juste après l'énoncé de la formule de Gauss-Bonnet).

(b) D'après la classification des surfaces on a que $\chi(S) \leqslant 0$. D'après un théorème du cours on sait qu'il existe un point de la surface où l'on a $K > 0$. De plus, K varie de façon continue sur la surface, il y a donc toute une région $R \subset S$ d'aire positive où $K > 0$. En particulier, $\int_R K\, dA > 0$, et on déduit que $\int_{S \setminus R} K < 0$, ce qui implique l'existence d'un point de S (plus exactement de $S \setminus R$) où $K < 0$.

* * * * *

Formules (pouvant éventuellement être utiles):

(1) Equations géodésiques:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(Eu' + Fv') &= \frac{1}{2}\left(E_u u'^2 + 2F_u u'v' + G_u v'^2\right) \\
\frac{d}{dt}(Fu' + Gv') &= \frac{1}{2}\left(E_v u'^2 + 2F_v u'v' + G_v v'^2\right)
\end{aligned}$$

(2) Theorema egregium : si, dans la première forme fondamentale, $F \equiv 0$, alors

$$K = \frac{-1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)\right)$$

(3) Identités trigonométriques :

$$4\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)\sinh^2\left(\frac{v}{2}\right) = (1 + \cos(u))(\cosh(v) - 1)$$

$$4\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)\cosh^2\left(\frac{v}{2}\right) = (1-\cos(u))(\cosh(v)+1)$$