**Université de Rennes 1**
**Institut Mathématique**
**2005–2006**

**Géométrie différentielle (M1)**
**Examen de rattrapage, ? juin 2006.**

*Justifiez toutes vos réponses. Durée de l'épreuve: deux heures. Tout type de documents et de calculatrices est interdit.*

**Exercice 1** Soit $\vec{\gamma}$ une courbe régulière dans $\mathbb{R}^3$ avec courbure non-nulle partout. La réunion des lignes tangentes à $\vec{\gamma}$ forme (localement) une surface. Les courbes sur cette surface qui intersectent les lignes tangentes dans des angles droites s'appelent les *développantes* de $\gamma$.

**(a)** L'équation d'une développante $\vec{\delta}(s)$ est de la forme

$$\vec{\delta}(s) = \vec{\gamma}(s) + \lambda(s)\vec{T}(s)$$

où $\vec{T}(s)$ note le vecteur tangent à $\vec{\gamma}$. Supposons que la courbe $\gamma$ est unitaire. Déterminer la fonction $\lambda(s)$ pour une développante générale.

L'interprétation géométrique de ce résultat est que la développante de $\gamma$ qui intersecte $\gamma$ en $s = 0$ est la courbe satisfaisant la condition suivante : le vecteur de $\vec{\delta}(s)$ à $\vec{\gamma}(s)$ est dans la direction de $\vec{T}(s)$, et sa longueur est la longueur d'arc de la courbe $\gamma$ entre $t = 0$ et $t = s$. Attention, ceci est vrai même si $\gamma$ n'est pas unitaire !

**(b)** On considère la courbe planaire $\gamma(t) = (t, \cosh(t))$. On rappele que la longueur d'arc du graphe de $\gamma$ entre $t = 0$ et $t = s$ est $\sinh(s)$ (admis). Démontrer que la développante de $\gamma$ est la tractrice.

**Exercice 2** On a vu en cours que des coordonnées géodésiques $\varphi\colon \Omega \to S$ ont la propriété que leurs premières formes fondamentales $\mathcal{F}_I(\varphi)$ sont de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G(u,v) \end{pmatrix}$.

**(a)** Donner explicitement une paramétrisation locale en coordonnées géodésiques d'une région du cylindre circulaire, ainsi que sa PFF.

**(b)** Donner explicitement une paramétrisation locale en coordonnées géodésiques du graphe de la fonction $f(x, y) = x \cdot y$, et calculer sa PFF.

**(c)** (Question de cours) Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface avec $K \equiv 0$ (où $K$ note la courbure de Gauss). Montrer que pour tout point $p \in S$, il existe un voisinage de $p$ qui est isométrique à une partie du plan.

**Exercice 3(a)** Étant donnés 5 points sur une sphère, montrer qu'il n'est pas possible de lier chaque couple de points par un arc, de telle façon que les arcs sont disjoints (sauf dans leur points extrémaux). Indication : on pourra montrer qu'une telle collection d'arcs serait une triangulation de la sphère avec des propriétés impossibles.

**(b)** En déduire que le graphe complet à 5 sommets (le graphe avec 5 sommets, qui sont deux-à-deux connectés par une arête) ne se plonge pas dans le plan $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 4** On considère la paramétrisation de la sphère (la "projection de Mercator")

$$\varphi(u, v) = (\frac{\cos v}{\cosh u}, \frac{\sin v}{\cosh u}, \tanh u).$$

**(a)** Montrer que cette paramétrisation est conforme.

**(b)** Sans faire référence à vos calculs en (a), expliquer pourquoi elle ne peut pas préserver l'aire.

**Dessin pour la question 1(b)** La fonction cosh et la tractrice