Université de Rennes 1
Institut Mathématique
2005–2006

Géométrie différentielle (M1)
Contrôle continu no 2.

Justifiez toutes vos réponses. Durée de l'épreuve: une heure. Tout type de documents et de calculatrices est interdit.

Exercice 1 On considère le cône S donné par la paramétrisation

$$\varphi(u,v) = \left(\frac{u}{2}\cos(v), \frac{u}{2}\sin(v), \frac{\sqrt{3}}{2}u\right) \qquad (u > 0, v \in [0, 2\pi[),$$

et le chemin $\gamma\colon\ [0, 2\pi] \to S,\ s \mapsto \big(\cos(s), \sin(s), \sqrt{3}\big)$ dans cette surface.

(a) Déterminer la courbure géodésique et la courbure normale à tout point de ce chemin.

(b) Si un habitant de la surface possède un pendule de Foucault, combien est-ce que ce pendule tourne pendant un trajet complet de γ ?

Exercice 2 Soient γ_1 et γ_2 deux courbes dans une surface S qui s'intersectent dans un point $P \in S$ en un angle droit. Montrer que la somme des deux courbures normales en P est égal à $\pm 2H$ (où H note la courbure moyenne de S en P). Indication : on pourra, par exemple, utiliser le théorème d'Euler.

Exercice 3 On considère la paramétrisation locale d'un ruban de Möbius

$$\varphi(t,\theta) = \begin{pmatrix} (1 - t\cdot\sin(\theta/2))\cos(\theta) \\ (1 - t\cdot\sin(\theta/2))\sin(\theta) \\ t\cdot\cos(\theta/2) \end{pmatrix} \qquad (-\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}, \quad 0 < \theta < 2\pi)$$

(a) Montrer que la courbure K est égal à $-\frac{1}{4}$ partout sur le cercle central (donné par l'équation $t = 0$).

(b) Déduire que ce ruban de Möbius ne peut pas être construit avec du papier et de la colle.

(c) Sans aucun calcul, montrer que $K \leqslant 0$ à tout point de la surface.

Exercice 4 Montrer que les seules isométries du caténoïde sont des produits de rotations autour de l'axe z, de reflexions dans des plans contenant l'axe z, et de reflexions dans le plan $x - y$.

Indications : on rappelle que la PFF de la paramétrisation standard φ du caténoïde est

$$\mathcal{F}_I(\varphi) = \begin{pmatrix} \cosh^2(u) & 0 \\ 0 & \cosh^2(u) \end{pmatrix},$$

et que la courbure K d'une surface avec $F \equiv 0$ et $G \equiv E$ est

$$K = \frac{-1}{2E}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{E_u}{E}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{E}\right)\right).$$