**Université de Rennes 1**
**Institut Mathématique**
**2005–2006**

**Géométrie différentielle (M1)**
**Contrôle continu no 1.**

*Justifiez toutes vos réponses. Durée de l'épreuve: une heure. Tout type de documents et de calculatrices est interdit.*

**Exercice 1** On considère une hélice circulaire unitaire sur le cylindre de rayon $R$ :

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\frac{s}{c}) \\ R \cdot \sin(\frac{s}{c}) \\ \lambda \cdot \frac{s}{c} \end{pmatrix}, \quad \text{où} \quad c = \sqrt{R^2 + \lambda^2}$$

**(a)** Calculer la torsion de cette courbe.

**(b)** Quelle est la torsion maximale qu'une telle hélice sur un cylindre de rayon $R = 5$ peut avoir ?

**Exercice 2** Montrer que

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$$

est une variété de classe $C^\infty$ dans $\mathbb{R}^{n^2}$. Quelle est sa dimension ?

**Exercice 3** Construire une triangulation de l'espace projectif $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ ; démontrer que $\chi(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) = 1$ (où $\chi$ note la charactéristique d'Euler-Poincaré.)

**Exercice 4** Regardons la paramétrisation standard de la sphère

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \cos(u)\cos(v) \\ \cos(u)\sin(v) \\ \sin(u) \end{pmatrix}$$

**(a)** Calculer sa première et deuxième forme fondamentale.

**(b)** On considère l'application $F$ de la sphère, privée des deux pôles, vers le cylindre, donnée par projection radiale, comme indiqué dans la figure.

$$F(x, y, z) = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \; , \; \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \; , \; z \right)$$

Démontrer le théorème d'Archimède : l'application $F$ préserve l'aire.

**(c)** En utilisant le résultat de (b), calculer l'aire de la sphère.