Université de Rennes 1
Institut Mathématique
2005–2006

Géométrie différentielle (M1)
Feuille d'exercices no 9.

Exercice 47 Soit S une surface minimale (sans bord).

(a) Que peut-on dire sur sa courbure de Gauss ?

(b) La surface S, peut-elle être compacte ?

(c) Si $P \in S$ est un point ombilical, que peut-on dire de la courbure principale $k(P)$?

(d) Soit S est une surface minimale ayant $K = 0$ en tout point. De quelle surface s'agit-il ?

Exercice 48 (a) Montrer que la surface $z = f(x, y)$ est minimale si et seulement si

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0.$$

(b) Montrer que la *surface de Scherk* $z = \ln(\frac{\cos(y)}{\cos(x)})$ est minimale.

Exercice 49 Dans cet exercice on va regarder des surfaces minimales avec une paramétrisation conforme. Supposons que φ est une paramétrisation locale dont la première forme fondamentale est $E(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2)$

(a) Montrer que $\varphi_{uu} + \varphi_{vv}$ est orthogonale à φ_u et φ_v.

(b) Déduire que

$$H \equiv 0 \;\Leftrightarrow\; \varphi_{uu} + \varphi_{vv} \equiv 0.$$

(c) Montrer que la *surface de Catalan*

$$\varphi(u, v) = \Big(u - \sin(u)\cosh(v), 1 - \cos(u)\cosh(v), -4\sin(\frac{u}{2})\sinh(\frac{v}{2})\Big)$$

est minimale.

(d) Montrer que dans la surface de Catalan, la courbe donnée par $u = 0$ est une droite. Montrer que la courbe donnée par $u = \pi$ est une parabole. Montrer que, après reparamétrisations convenables, ces deux courbes sont des géodésiques.