**Université de Rennes 1**
**Institut Mathématique**
**2005–2006**

**Géométrie différentielle (M1)**
**Feuille d'exercices no 8.**

**Exercice 44** (Facile) Démontrer que les seules géodésiques sur la sphère $S^2$ sont les grands cercles.

**Exercice 45** (Facile) Si $P$ et $Q$ sont deux points distincts sur le cylindre circulaire, montrer qu'il y a soit 2, soit une infinité de géodésiques injectives dans le cylindre qui joignent $P$ et $Q$.

**Exercice 46** Dans cet exercice, on va étudier les géodésiques sur les surfaces de révolution $S$. Nous utilisons la paramétrisation

$$\varphi(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$$

où la courbe $(f(u), g(u))$ est supposée unitaire : $f'^2 + g'^2 = 1$.

On rappelle que $f(u)$ est la même chose que $\rho(u, v)$, la distance entre le point $\varphi(u, v) \in S$ et l'axe de rotation. On rappelle aussi que la première forme fondamentale est $\mathcal{F}_I(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f^2(u) \end{pmatrix}$.

**(a)** Écrire les équations géodésiques dans ce contexte.

**(b)** Soit $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$ une géodésique unitaire sur $S$. Soit $\psi(t)$ l'angle entre $\gamma'(t)$ et $\varphi_u(u(t), v(t))$ (voir dessin). Montrer que

$$\rho \cdot v' = \sin(\psi).$$

**(c)** Démontrer la première partie du théorème de Clairaut :

**Théorème** *Avec les notations de cet exercice, on a que $\rho \cdot \sin(\psi)$ est constant lelong $\gamma$. Réciproquement, si $\rho \sin(\psi)$ est constant lelong une courbe $\gamma$, et si aucun segment ouvert de $\gamma$ fait partie d'une parallèle ($v =$ const) de $S$, alors $\gamma$ est une géodésique.*

**Exercice 47** Dans cet exercice on va étudier les coordonnées géodésiques polaires sur une surface $S$. Comme application, on va voir une façon comment un animal vivant dans la surface peut mésurer la courbure $K$ au point $P \in S$.

Soit $P \in S$, et soit $\vec{v} \in T_P S$ un vecteur tangent unitaire. Pour $\theta \in [0, 2\pi[$ soit $\vec{v}_\theta \in T_P S$ le vecteur tangent unitaire qui a un angle de $\theta$ avec $\vec{v}$. Soit $\gamma^\theta\colon\ r \mapsto \gamma^\theta(r)$ la géodésique telle que $\gamma^\theta(0) = P$ et telle que $\frac{d}{dr}\gamma^\theta(0) = \vec{v}_\theta$. On admettra qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\varphi(r, \theta)$ est de classe $C^\infty$ pour $-\epsilon < r < \epsilon$ et une paramétrisation locale pour $0 < r < \epsilon$.

**(a)** Soit $R \in \mathbb{R}$ tel que $0 < R < \epsilon$. Montrer que $\int_0^R \|\frac{d\gamma^\theta}{dr}\|^2 \mathrm{d}r = R$.

**(b)** Démontrer que $\varphi_r \cdot \varphi_\theta = 0$. (Indication : calculer la dérivée des deux membres par rapport à $\theta$). Déduire que

$$\mathcal{F}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G(r,\theta) \end{pmatrix}.$$

Ce résultat s'appelle le *lemme de Gauss*. Il dit que le "cercle" de rayon $R$ autour de $P$ est perpendiculaire à tous ses "rayons".

Soit $\widetilde{\varphi}(u, v)$ une reparamétrisation de $\varphi(r, \theta)$ par $u = r \cdot \cos(\theta)$, $v = r \cdot \sin(\theta)$. On admettra que $\widetilde{\varphi}(u, v)$ est une paramétrisation locale (pour $u^2 + v^2 < \epsilon$).

**(c)** Montrer que $\mathcal{F}(\widetilde{\varphi}) = \begin{pmatrix} \widetilde{E} & \widetilde{F} \\ \widetilde{F} & \widetilde{G} \end{pmatrix}$, où

$$\widetilde{E} = \frac{u^2}{r^2} + \frac{Gv^2}{r^4}, \qquad \widetilde{F} = \left(1 - \frac{G}{r^2}\right)\frac{uv}{r^2}, \qquad \widetilde{G} = \frac{v^2}{r^2} + \frac{Gu^2}{r^4}.$$

**(d)** Montrer que $u^2(\widetilde{E} - 1) = v^2(\widetilde{G} - 1)$. À l'aide d'un développement de Taylor de $\widetilde{E}(u, v)$ et de $\widetilde{G}(u, v)$ autour de $(0, 0)$, déduire que

$$G(r,\theta) = r^2 + kr^4 + o(r^4), \quad \text{où } k = -\frac{K(P)}{3}.$$

**(e)** Soit $S^1_R \subset S$ le "cercle" de centre $P$ et de rayon $R$ (plus exactement l'image de $\theta \mapsto \gamma^\theta(R)$). Montrer que la circonférence du cercle $S^1_R$ est

$$c_R = 2\pi R \left(1 - \frac{K(P)}{6}R^2 + o(R^2)\right),$$

et l'aire du disque borné par $S^1_R$ est

$$A_R = \pi R^2 \left(1 - \frac{K(P)}{6}R^2 + o(R^2)\right).$$