Université de Rennes 1
Institut Mathématique
2005–2006

Géométrie différentielle (M1)
Feuille d'exercices no 7.

Exercice 39 Soit $\gamma\colon [s_0, s_1] \to S$ une courbe unitaire dans une surface. Un animal qui vit dans la surface dirait que la courbure de la courbe au point $\gamma(s)$ est $\rho_{\text{geod}}(s)$, la courbure géodésique. Donc, on dit qu'un vecteur $\vec{w} \in T_{\gamma(s_1)}S$ est obtenu à partir d'un vecteur $\vec{v} \in T_{\gamma(s_0)}S$ par transport parallèle lelong γ si

$$\text{angle}(\gamma'(s_1), \vec{w}) = \text{angle}(\gamma'(s_0), \vec{v}) - \int_{s_0}^{s_1} \rho_{\text{geod}}(s)\mathrm{d}s.$$

(a) Dans la sphère, calculer la courbure géodésique d'une parallèle

$$\gamma(t) = (\cos(\varphi)\cos(t), \cos(\varphi)\sin(t), \sin(\varphi))$$

pour $t \in [0, 2\pi]$, ainsi que le résultat de transport parallèle d'un vecteur tangent lelong ce chemin.

(b) Expliquer le rapport entre la question (a) et le pendule de Foucault.

Exercice 40 Recalculer la courbure de Gauss d'une surface de révolution en utilisant le theorema egregium.

Exercice 41 On considère le hélicoïde S, donné par la paramétrisation $\varphi(u, v) = (u\cos(v), u\sin(v), v)$. Démontrer que les seules isométries $f\colon\ S \to S$ sont $S_\lambda, R_x \circ S_\lambda, R_y \circ S_\lambda, R_z$ et $\circ S_\lambda$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Ici, S_λ note l'application "tourner le vis" $\varphi(u, v) \mapsto \varphi(u, v + \lambda)$, et R_x, R_y et R_z sont les rotations par un angle de π autour des axes x, y et z.

Indication : Supposons que f envoie $\varphi(u, v)$ sur $\varphi(\widetilde{u}, \widetilde{v})$, où $\widetilde{u} = \widetilde{u}(u, v)$ et $\widetilde{v} = \widetilde{v}(u, v)$ sont des fonctions de u et v. Montrer d'abord que $\widetilde{u} = \pm u$. Puis comparer les PFF de φ et $f \circ \varphi$.

Exercice 42 Le but de cet exercice (très facile) est de montrer que la cartographie est une science non-triviale, dans le sens qu'elle n'a pas de "solution optimale": toutes les cartes contiennent forcement une déformation des distances.

(a) Montrer qu'il n'existe pas d'isométrie entre une région de la sphère et une région du plan $\mathbb{R}^2$.

(b) Montrer qu'il n'y a pas de carte d'une région sur terre qui représente correctement les angles et l'aire.

Exercice 43 On consière les paramétrisations locales

$$\varphi(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), \ln(u)) \quad \text{et} \quad \widetilde{\varphi}(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), v).$$

(La premiere représente une surface de révolution, la deuxième représente l'helicoïde).

(a) Démontrer que la courbure de Gauss de φ au point $\varphi(u,v)$ est la même que celle de $\widetilde{\varphi}$ au point $\widetilde{\varphi}(u,v)$, mais que l'application f qui envoie $\varphi(u,v)$ sur $\widetilde{\varphi}(u,v)$ n'est pas une isométrie.

(b)* Démontrer qu'il n'y a pas d'isométrie entre les deux surfaces.