Université de Rennes 1
Institut Mathématique
2005–2006

Géométrie différentielle (M1)
Feuille d'exercices no 6.

Exercice 36 Il y avait une erreur dans l'énoncé de l'exercice 34 (hélicoïde et catenoïde) : la paramétrisation donnée pour l'hélicoïde était correcte, mais elle ne donnait pas la même première forme fondamentale que la paramétrisation du catenoïde. Voici une seule paramétrisation locale, qui dépend d'un paramètre α. Pour $\alpha = 0$, on obtient une nouvelle paramétrisation du hélicoïde, et pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ on obtient un catenoïde.

$$\varphi_\alpha(u,v) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\sinh(v)\sin(u) + \sin(\alpha)\cosh(v)\cos(u) \\ -\cos(\alpha)\sinh(v)\cos(u) + \sin(\alpha)\cosh(v)\sin(u) \\ u\cos(\alpha) + v\sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Calculer la première forme fondamentale de cette paramétrisation.

Exercice 37 Déterminer l'image par l'application de Gauss des surfaces suivantes :

(a) $S_1 = \{(u, v, u^2 - v^2) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$

(b) $S_2 = \{(u, v, u^2 + v^2) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$

Exercice 38 On considère la paramétrisation du tore T^2

$$\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} (a + b\cos(u))\cos(v) \\ (a + b\cos(u))\sin(v) \\ b\sin(u) \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad 0 < b < a.$$

(Si c'est trop ennuyieux, prenez $a = 2, b = 1$.) On considère la courbure de Gauss, interpretée comme fonction $K\colon T^2 \to \mathbb{R}$.

(a) Démontrer que $\int\int K\ dA_\varphi = 0$. (Le théorème de Gauss-Bonnet va "expliquer" ce résultat.)

(b) Redémontrer le résultat de (a) de la manière suivante: soient S_+ et S_- les régions du tore où la courbure de Gauss est positive/négative. Montrer que $\int\int_{S_+} K\ dA_\varphi = -\int\int_{S_-} K\ dA_\varphi = 4\pi$.