

Géométrie différentielle (M1)
Feuille d'exercices no 5.

Exercice 32 On considère une surface de révolution, donnée par une paramétrisation locale $\varphi(u, v) = (f(u) \sin(v), f(u) \cos(v), g(u))$ avec $f(u) > 0$ et $(f'(u))^2 + (g'(u))^2 = 1$ pour tout u .

- (a) Calculer la courbure de Gauss K et courbure moyenne H à tout point de la surface.
- (b) Dessiner l'exemple du tore ($f(u) = 2 + \cos(u)$, $g(u) = \sin(u)$) et indiquer en couleur les régions où $K > 0$, $K = 0$, et $K < 0$.
- (c) Supposons que $K \equiv 0$. Démontrer que la surface est une partie d'un cylindre, d'un cône, ou du plan x - y .

Exercice 32 Une *surface réglée* est, par définition, une surface donnée par une seule paramétrisation locale de la forme

$$\varphi(u, v) = \vec{\gamma}(u) + v\vec{\delta}(u)$$

où γ et δ sont des chemins C^∞ dans $\mathbb{R}^3$. (En particulier, une surface réglée est une réunion de droites.)

- (a) Calculer la courbure de Gauss K à tout point d'une telle surface.
- (b) Démontrer que $K \leq 0$ à tout point d'une surface réglée.

Exercice 32 Dans cet exercice on considère le *hélicoïde* et le *catenoïde*. Remarquez que les deux surfaces ont la même première forme fondamentale, c.à.d., il y a des sous-ensembles ouverts dans les deux qui sont isométriques ! En ce qui concerne la courbure moyenne, on va discuter nos résultats en détail plus tard.

(a) Le hélicoïde est la surface réglée donnée par la paramétrisation $\varphi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u)$ (pour $u \in \mathbb{R}$, $0 < v < 2\pi$). Décrire cette surface. Puis, calculer la courbure de Gauss K et la courbure normale H à tout point de cette surface.

(b) Le catenoïde est la surface de révolution avec $f(u) = \cosh(u)$ et $g(u) = u$ (attention, on n'a pas $(f')^2 + (g')^2 = 1$!). Dessiner la surface. Puis, calculer la courbure de Gauss et la courbure moyenne à tout point de la surface.

Exercice 33 (a) On a vu en cours que la *pseudosphère* est la surface de révolution autour de l'axe z de la courbe $z = \sqrt{1-x^2} - \operatorname{argcosh}(\frac{1}{x})$ (cette courbe s'appelle la *tractrice*). Soit (x_0, z_0) un point sur cette courbe. Montrer que le segment de la tangente à cette courbe au point (x_0, z_0) , entre le point (x_0, z_0) et son intersection avec l'axe z est toujours de longueur 1.

(b) On considère la paramétrisation de la pseudosphère comme surface de révolution avec

$$f(u) = \frac{1}{u} \quad \text{et} \quad g(u) = \sqrt{1 - \frac{1}{u^2}} - \operatorname{argcosh}(u) \quad (\text{où } u \geq 1).$$

Calculer la première forme fondamentale de cette paramétrisation, et interpréter le résultat.