Université de Rennes 1
Institut Mathématique
2005–2006

Géométrie différentielle (M1)
Feuille d'exercices no 4.

Exercice 25 On considère la surface dans $\mathbb{R}^3$ qui est l'image de la paramétrisation $\varphi\colon\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto (u, v, 2u^2 - 3v^2)$.

(a) Calculer l'aire de la région $\{\varphi(u, v) \mid 0\leqslant u\leqslant 2, -1\leqslant v\leqslant 3\}$.

(b) Calculer l'angle d'intersection entre les courbes $\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t))$, où $u(t) = 1, v(t) = t$, et $\widetilde{\gamma}(t) = \varphi(\widetilde{u}(t), \widetilde{v}(t))$, où $\widetilde{u}(t) = t, v(t) = 2 - t$.

Exercice 26 Montrer que la projection stéréographique est une application conforme.

Exercice 27 On considère la paramétrisation de la sphère

$$\varphi(u, v) = (\frac{\cos v}{\cosh u}, \frac{\sin v}{\cosh u}, \tanh u).$$

Montrer que cette paramétrisation est conforme.

(Remarque : Cette paramétrisation est connue en cartographie comme la "projection de Mercator". Elle est pratique pour la navigation maritime, car elle est conforme, mais elle a aujourd'hui une connotation politique colonialiste, parce qu'elle gonfle l'aire des régions loin de l'équateur relativement aux régions équatoriales.)

Exercice 28 Démontrer qu'une application C^∞ d'une surface vers une autre qui est conforme *et* préserve l'aire est une isométrie.

Exercice 29 On considère la paramétrisation d'une surface de révolution $\varphi(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$. Calculer sa seconde forme fondamentale $\begin{pmatrix} L(u,v) & M(u,v) \\ M(u,v) & N(u,v) \end{pmatrix}$.

Exercice 30 En cours, on avait défini l'aire de $\varphi(R)$ (où $\varphi\colon\ \Omega \to \mathbb{R}^3$ est une paramétrisation locale et $R \subset \Omega$) par

$$Aire(\varphi(R)) = \int_R \sqrt{\det \mathcal{F}_I}.$$

Montrer que ceci est bien-défini (indépendant du choix de paramétrisation). Autrement dit, si $\Phi\colon\ \widetilde{\Omega} \to \Omega$ est un difféomorphisme, on veut montrer que la paramétrisation $\widetilde{\varphi} := \varphi \circ \Phi$ donne le même résultat.

Exercice 31* Soit $\widetilde{\varphi}(\widetilde{u}, \widetilde{v})$ une reparamétrisation d'une paramétrisation locale $\varphi(u, v)$, par une application Φ avec $(u, v) = \Phi(\widetilde{u}, \widetilde{v})$. Montrer que

$$\begin{pmatrix} \widetilde{L} & \widetilde{M} \\ \widetilde{M} & \widetilde{N} \end{pmatrix} = \pm D\Phi^t \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} D\Phi,$$

où l'on prend le signe $+$ si $\det(D\Phi) > 0$ et le signe $-$ si $\det(D\Phi) < 0$.