Université de Rennes 1
Institut Mathématique
2005–2006

Géométrie différentielle (M1)
Feuille d'exercices no 3.

Exercice 20 Les deux questions suivantes semblent triviales à première vue, mais elles ne le sont pas ! Le problème est toujours que si $S \subset \mathbb{R}^3$ est une surface, on n'a *pas de notion d'*application de classe C^∞ de S vers $\mathbb{R}^2$! Une stratégie dans les deux cas est de considérer une projection de la surface sur le plan $x-y$ (ou $x-z$ ou $y-z$) qui est localement injective.

(a) Soient $\varphi, \widetilde{\varphi}$ deux paramétrisations locales régulières d'une surface de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^3$, et supposons que les images de φ et $\widetilde{\varphi}$ s'intersectent. Démontrer que l'application $\varphi^{-1} \circ \widetilde{\varphi}$ est de classe C^∞.

(b) Soit $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ une paramétrisation locale régulière d'une surface S de classe C^∞ dans $\mathbb{R}^3$. Soit $\gamma\colon [a,b] \to \varphi(\Omega) \subset S$ une courbe C^∞. Montrer que la courbe $\alpha := \varphi^{-1} \circ \gamma\colon [a,b] \to \Omega$ est de classe C^∞.

Exercice 21 On considère une triangulation de la sphère S^2 par n triangles curvilignes de telle façon qu'il y a exactement r triangles autour de chaque sommet.

(a) Montrer que le nombre de sommets est $\frac{3n}{r}$.

(b) Montrer que $\frac{6}{r} - \frac{4}{n} = 1$.

(c) En déduire que $r \leqslant 5$ et dessiner les triangulations lorsque $r = 3, 4, 5$.

Exercice 22 Calculer la PFF de $\varphi(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$.

Exercice 23 Calculer la PFF de la paramétrisation de la sphère par coordonnées sphériques $(\theta, \varphi) \mapsto (\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi)$. Utiliser le résultat pour calculer la longueur de la parallèle $\varphi = C$ en fonction de C, ainsi que l'aire de S^2.

Exercice 24 Montrer que si l'on transforme une surface par une isométrie de $\mathbb{R}^3$, la PFF ne change pas.