Université de Rennes 1
Institut Mathématique
2005–2006

Géométrie différentielle (M1)
Feuille d'exercices no 2.

Exercice 14 (Projection stéréographique)

(a) Écrire explicitement les applications $\varphi_N \colon \mathbb{R}^2 \to S^2 \setminus \{N\}$ et son inverse, ainsi que φ_S et φ_S^{-1}.

(b) Montrer que $\varphi_N^{-1}\varphi_S \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est donné par $(x, y) \mapsto (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$. En déduire que l'atlas $\{\varphi_N, \varphi_S\}$ n'est pas orienté.

(c) Comment peut-on modifier φ_S pour que $D\varphi_N^{-1} \circ D\varphi_S$ préserve l'orientation de $\mathbb{R}^2$?

(d) Montrer que la sphère S^2 n'admet pas d'atlas avec une seule carte.

Exercice 15 Soit $U \subset \mathbb{R}^N$ ouvert, et soit $f \colon U \to \mathbb{R}^k$ (où $k < N$) une application de classe C^∞ de telle façon que

$$x \in U, f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{rang} Df(x) = k \ \ (\text{c.à.d., “}Df \text{ est de rang maximal”}).$$

Montrer que $f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^N$ est une variété C^∞ de dimension $N - k$ dans $\mathbb{R}^N$.

Exercice 16 Soit A une matrice appartenant à $SU(2)$ (c.à.d., $A \in M(2 \times 2, \mathbb{C})$ est telle que $A^H A = I_2$ et $\det(A) = 1$). Montrer que A est de la forme $\begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$, où $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Montrer que, réciproquement, toute matrice de cette forme appartient à $SU(2)$.

Exercice 17 On a vu en cours que le groupe spécial unitaire $SU(2)$ est homéomorphe à une sphère de dimension 3. Nous observons que le sous-groupe $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\}$ est distingué dans $SU(2)$, et nous allons étudier le groupe quotient, qu'on notera $SU(2)/\pm 1$. Le but de cet exercice est de démontrer le résultat suivant :

Il existe un isomorphisme de groupes (qui est aussi un difféomorphisme)

$$SU(2)/\pm 1 \longrightarrow SO(3).$$

En particulier, le groupe $SO(3)$ est homéomorphe à l'espace projectif $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$.

(a) Soit $\mathcal{S} \subset \mathbb{H}$ le groupe des quaternions de norme 1, et soit $E \subset \mathbb{H}$ le sous-espace linéaire engendré par les vecteurs I, J et K. Si $q \in \mathcal{S}$, montrer que l'application linéaire $\mathbb{H} \to \mathbb{H}, v \mapsto qvq^*$ envoie E sur lui-même, et préserve le produit scalaire $\langle v, w\rangle = \frac{1}{2}(v^*w + w^*v)$ sur E.

(b) Pour tout $q \in \mathcal{S}$, soit $\rho(q)$ la matrice qui représente l'application $v \mapsto qvq^*$ par rapport à la base (I, J, K) de E. Montrer que $\rho(q) \in SO(3)$, et que l'application $\rho\colon \mathcal{S} \to SO(3)$ est un epimorphisme avec noyau $\{\pm 1\}$.

(c) Conclure.

Exercice 18 Quel est l'espace obtenu en enlevant un disque ouvert de $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$?

Exercice 19 Soit $T^2 \subset \mathbb{R}^3$ le tore de révolution obtenu en faisant tourner le cercle (contenu dans le plan $x - -z$) de centre $(3, 0, 0)$ et de rayon 1, autour de de l'axe O_z. On consière deux actions du groupe $\mathbb{Z}_2$ (le groupe à 2 éléments) sur T^2 :

(a) $g(x, y, z) = (x, -y, -z)$, rotation de π autour de O_x :

(b) $g(x, y, z) = (-x, -y, z)$, rotation de π autour de O_z :

Dans chaque cas, décrire l'espace quotient $T^2/\mathbb{Z}_2$.