Université de Rennes 1
Institut Mathématique
2005–2006

Géométrie différentielle (M1)
Feuille d'exercices no 10.

Exercice 50 Consiérons une géodésique qui traverse le point p dans la partie supérieure ($z > 0$) du hyperboloide de révolution $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, et qui a un angle ψ avec le "méridien" passant par p (voir dessin), où ψ est tel que $\sin(\psi) = \frac{1}{\rho}$.

(a) Montrer que, en suivant la géodésique dans la direction de z décroissant, on s'approche de façon asymptotique de la parallèle $z = 0$.

(b) Sans calcul, décrire qualitativement le comportement d'une géodésique avec un angle ψ plus grand ou plus petit.

Exercice 51 Donner une démonstration élémentaire de la formule pour le triangle géodésique Δ dans la sphère

$$\text{aire}(\Delta) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$$

Exercice 52 Déduire le "théorème 1′ " du "théorème 1".

Exercice 53 Supposons que la courbure K d'une paramétrisation locale φ satisfait $K(u, v)\leqslant 0$ pour tout (u, v), et que γ est un n-gone sur φ dont les arêtes sont des géodésiques. Montrer que $n\geqslant 3$, et que, si $n = 3$, l'aire de la région bornée par γ est inférieure ou égale à π.

Exercice 54 Considérons la surface de révolution

$$\varphi(u, v) = (f(u)\cos(v), f(u)\sin(v), g(u))$$

où $f'(u)^2 + g'(u)^2 = 1$ pour tout u. Soient u_1 et u_2 des nombres réels avec $u_1 < u_2$, et soient $\gamma_i(t) = \varphi(u_i, t)$ ($i = 1$ ou 2) les deux parallèles. Enfin, soit R la région de $\mathbb{R}^2$ en forme d'anneau donnée par

$$u_1\leqslant u\leqslant u_2, \quad 0 < v < 2\pi.$$

Calculer

$$\int_0^{\ell(\gamma_1)} \rho_g \,\mathrm{d}s, \quad \int_0^{\ell(\gamma_2)} \rho_g \,\mathrm{d}s, \quad \text{et} \quad \int\int_R K \,\mathrm{d}A_\varphi,$$

et expliquer les résultats à l'aide du théorème de Gauss-Bonnet.