**Université de Rennes 1**
**Institut Mathématique**
**2005–2006**

**Géométrie différentielle (M1)**
**Feuille d'exercices no 1.**

**Exercice 1** Soit $\gamma(s)$ une courbe *plane* à paramétrage unitaire. Montrer que les deux affirmations suivantes sont équivalentes :

1. La courbure est constante : il existe $R > 0$ tel que $\rho(s) \equiv 1/R$
2. La courbe est un arc de cercle, sur un cercle de rayon $R$.

(Attention, une implication est facile, l'autre moins.)

**Exercice 2(a)** Soit $\gamma(s)$ une courbe *plane* à paramétrage unitaire. Montrer que

$$\rho(s) = |\frac{d\Phi}{ds}(s)| \quad \text{où} \quad \Phi(s) = \text{angle entre } T(s) \text{ et le vecteur } (1,0).$$

**(b)** Montrer que $\gamma$ est une droite si et seulement si $\rho \equiv 0$.

**Exercice 3** Cet exercice sert à démontrer que toute courbe lisse fégulière a un reparamétrage unitaire. Soit $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière, $t_0 \in I$. On considère la fonction

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\|\, du$$

appellée *abscisse curviligne* d'origine $t_0$.

**(a)** Montrer que $s\colon I \to s(I), t \mapsto s(t)$ est un difféomorphisme. On notera la réciproque $t\colon s(I) \to I, s \mapsto t(s)$.

**(b)** Posons $\delta(s) = \gamma(t(s))$. Montrer que $\delta(s)$ est un reparamétrage unitaire de $\gamma(t)$.

**Exercice 4** Calculer la longueur de la courbe $\gamma(t) = (2t, t^2, \log t)$ entre les points $p = (2, 1, 0)$ et $q = (4, 4, \log 2)$.

**Exercice 5** (Courbes tracés sur une sphère) Soit $\gamma(t)$ une courbe paramétrée unitaire sur la sphère de rayon 1 et centre $(0, 0, 0)$ dans $\mathbb{R}^3$. Démontrer que la courbure $\rho$ de $\gamma$ satisfait

$$\forall t,\ \rho(t) \geqslant 1.$$

**Exercice 6(a)** Trouver la courbure en $(0,0)$ du graphe de $y = 7x^2 + 8x^3 + 9x^4$.

**(b)** Plus généralement, démontrer que si une courbe $\gamma$ dans le plan $\mathbb{R}^2$ est donné par $\gamma(x) = (x, y(x))$, alors

$$\rho(x) = \frac{|y''(x)|}{(1 + (y'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

**Exercice 7** Soit $\gamma(s)$ une courbe unitaire dans $\mathbb{R}^3$. Si chaque droite tangente à $\gamma$ passe par le point $(0,0,0)$, montrer que $\gamma$ est une droite.

**Exercice 8** Considerons l'hélice sur le cylindre de rayon $a$ et de pente $\frac{b}{a}$, donnée par

$$\gamma(t) = (a \cdot \cos\frac{t}{c}, a \cdot \sin\frac{t}{c},\ \frac{bt}{c}) \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

**(a)** Montrer qu'il s'agit d'un paramétrage unitaire.

**(b)** Calculer $N, B, \rho$, et $\tau$.

**Exercice 9** Soit $\gamma$ une courbe paramétrée unitaire dans $\mathbb{R}^3$.

**(a)** $\rho \equiv 0 \;\Leftrightarrow\; \gamma$ est une droite.

**(b)** $\tau \equiv 0 \;\Leftrightarrow\; \gamma$ est une coube plane.

**(c)** $\tau \equiv 0$ et $\rho$ constante $\;\Leftrightarrow\; \gamma$ est un arc de cercle.

**(d)** $\rho$ et $\tau$ sont constantes $\neq 0 \;\Leftrightarrow\; \gamma$ est une hélice circulaire.

**Exercice 10** L'ADN de tous les êtres vivants sur terre est une double hélice, de torsion positive ou négative ?

**Exercice 11** (Courbe tracée sur une sphère, II) Soit $\gamma$ une courbe paramétrée unitaire dans $\mathbb{R}^3$ telle que $\rho(t) > 0$ et $\tau(t) \neq 0$.

**(a)** Si $\gamma(t)$ est sur la sphère de rayon 1 et de centre $\vec{C}$ montrer que

$$\gamma(t) - \vec{C} = \frac{-1}{\rho}\,\vec{N} + (\frac{1}{\rho})'\frac{1}{\tau}\,\vec{B}, \text{ et déduire que } 1 = \frac{1}{\rho^2} + ((\frac{1}{\rho})'\frac{1}{\tau})^2$$

**(b)** Réciproquement, si $\frac{1}{\rho^2} + ((\frac{1}{\rho})'\frac{1}{\tau})^2$ est constante $\equiv 1$, et si $(\frac{1}{\rho})' \neq 0$, montrer que $\gamma(t)$ est sur une sphère de rayon 1.

**Remarque** On appelle la sphère de centre $\vec{C} := \gamma(t) + \frac{1}{\rho}\,\vec{N} - (\frac{1}{\rho})'\frac{1}{\tau}\,\vec{B}$ et de rayon $\|\gamma(t) - \vec{C}\|$ la *sphère osculatrice* de $\gamma$ au point $\gamma(t)$. On peut montrer qu'elle est l'unique sphère qui y présente un contact d'ordre $\geqslant 3$ avec $\gamma$.

**Exercice 12** Soit $\gamma$ une courbe paramétrée. Il est souvent utile de pouvoir calculer $\rho$ et $\tau$ directement, sans passer par un reparamétrage unitaire de $\gamma$. Voilà les formules :

$$\rho(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

$$\tau(t) = \frac{-\langle(\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)), \gamma'''(t)\rangle}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2}$$

Montrer la première. (Indication : une façon possible de procéder est de montrer que la formule est vraie pour des courbes unitaires, et qu'elle est invariante par reparamétrage.)

**Exercice 13** Soient $T(s) = (t_1(s), t_2(s), t_3(s))$, $N(s) = (n_1(s), n_2(s), n_3(s))$, et $B(s) = (b_1(s), b_2(s), b_3(s))$ trois courbes dans $\mathbb{R}^3$. Supposons que

$$T(0) = (1, 0, 0), \quad N(0) = (0, 1, 0), \quad \text{et} \quad B(0) = (0, 0, 1).$$

Supposons enfin qu'il s'agit d'une solution de l'equation différentielle (à neuf paramètres)

$$\begin{pmatrix} T'(s) \\ N'(s) \\ B'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \rho(s) & 0 \\ -\rho(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) \\ N(s) \\ B(s) \end{pmatrix}$$

où $\rho\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\tau\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions $C^\infty$. Démontrer que pour tout $s \in \mathbb{R}$, les trois vecteurs $T(s), N(s)$ et $B(s)$ sont de norme 1 et mutuellement othogonaux. (Indication : on peut remplacer la matrice $3 \times 3$ par une matrice antisymétrique arbitraire.)