Université de Rennes 1
Institut Mathématique
Cours A01 (Bert Wiest), 2005–2006

Exercice 35 Démontrer par un calcul direct que

$$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a) \cdot \mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a) \cdot \mathrm{sh}(b).$$

Exercice 36 Resoudre les équations suivantes

(a) $\arcsin(x) - \arccos(x) = 2 \cdot \arctan(2x) - \frac{\pi}{2}$. (Indication : utiliser l'égalité $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$)

(b) $\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$. (Indication : prendre la tangente des deux membres.)

Exercice 37 Calculer la dérivée des fonctions $x \mapsto \arctan(\mathrm{th}(x))$ et $x \mapsto \arctan(\mathrm{sh}(2x))$. En déduire que pour tout nombre réel x on a

$$2\arctan(\mathrm{th}(x)) = \arctan(\mathrm{sh}(2x)).$$

Exercice 38(a) Montrer que pour tout nombre $x > 0$ on a des inégalités

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$

(b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \leqslant 1 + \ln(n).$$

(c) Regardons la suite $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)$. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et convergente.

Solutions des exercices 28, 31–34

Exercice 28 (a) Montrer que $\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Solution On a vu en cours que pour $x\geqslant 1$ on a $0\leqslant\frac{\ln(x)}{x} \overset{(*)}{\leqslant} \frac{2}{\sqrt{x}}$, et en particulier que $\frac{\ln(x)}{x} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Pour $x\geqslant 1$ on obtient

$$0\leqslant\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(\sqrt{x}^2)}{\sqrt{x}} = \frac{2\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \overset{\text{par }(*)}{\leqslant} 2\cdot\frac{2}{\sqrt{\sqrt{x}}} = \frac{4}{\sqrt[4]{x}}.$$

En particulier, on déduit, par le théorème des gendarmes, que $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$.

(b) La convergence vers 0 en (a) est très lente ! Calculer (de préférence, sans calculatrice), un x_0 tel que $\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} < \frac{1}{4}$ pour $x > x_0$.
Solution Pour avoir $\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\leqslant\frac{1}{4}$, il suffit de choisir x assez grand pour que $\frac{4}{\sqrt[4]{x}}\leqslant\frac{1}{4}$, ce qui est équivalent à $x\geqslant(4\cdot 4)^4 = 16^4(= 65536)$. (En experimentant avec une calculatrice, on peut voir qu'en fait la condition $x\geqslant 685$ est suffisante pour impliquer $\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\leqslant\frac{1}{4}$.)

Exercice 31 Considérons la fonction

$$f\colon\ [0,+\infty[\to\mathbb{R},\ x\mapsto\begin{cases} x^{x+\frac{1}{x}} & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}.$$

(a) Montrer que f est continue en 0.
Solution Il suffit de démontrer que $\lim_{x\to0^+} f(x) = 0$. Regardons d'abord la fonction $h(x) = (x+\frac{1}{x})\ln(x)$. Pour $0<x<1$ on a $h(x)<0$. En plus,

$$\lim_{x\to0^+}|h(x)| = \lim_{x\to0^+}|x+\frac{1}{x}|\cdot|\ln(x)| = +\infty$$

(où la dernière égalité est vraie parce que les deux facteurs tendent vers $+\infty$.) En total, on obtient $\lim_{x\to0^+} h(x) = -\infty$; on en déduit que $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\exp(h(x)) = 0$.

(b) Calculer la dérivée de f, et démontrer que la fonction f est strictement croissante.
Solution $f'(x) = f(x)\cdot\big(\ln(x)(1-\frac{1}{x^2})+1+\frac{1}{x^2}\big)$. Pour tout réel positif x, les termes $f(x)$ et $1+\frac{1}{x^2}$ sont strictement positifs. En plus, le terme $\ln(x)(1-\frac{1}{x^2}$ est toujours positif ou nul, parce que pour $0\leqslant x\leqslant 1$, les deux facteurs sont négatifs, et pour $x\geqslant 1$, les deux facteurs sont négatifs. Il vient $f'(x)>0$ pour $x\in\mathbb{R}^+$. Donc f est strictement croissante sur $[0,-\infty[$.

Exercice 32 Pour les deux fonctions suivantes, trouver le domaine de définition, calculer la dérivée, étudier le sens de variation, et calculer la limite en 0.

(a) $f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}$. **Solution** $f(x) = \exp(-\sqrt{x}\cdot\ln(\sqrt{x})) = \exp(-\frac{\sqrt{x}}{2}\ln(x))$. L'expression $\sqrt{x}$ est définie si et seulement si $x\geqslant 0$. Pour $x=0$, on obtient

$f(x) = 0^0$, ce qu'on n'a pas défini. En revanche, pour $x > 0$, $\ln(x)$ est bien-défini, est $\exp(y)$ est défini pour tout $y \in \mathbb{R}$; donc le domaine de définition de f est $\mathbb{R}_+$.

Regardons la fonction $y(x) = \sqrt{x}$. Quand $x \to 0^+$, on a que $y(x) \to 0$. En plus, d'après un théorème du cours, la limite à droite de $y \cdot \ln(y)$ est 0. En total, on obtient $\lim_{x\to 0^+} -\sqrt{x} \cdot \ln(\sqrt{x}) = 0$, et comme la fonction exp est continue, on en déduit que $\lim_{x\to 0^+} \exp(-\sqrt{x} \cdot \ln(\sqrt{x})) = \exp(0) = 1$.

Calculons la dérivée de f. On trouve

$$f'(x) = f(x) \cdot \left(\frac{-\ln(x)}{4\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = -f(x) \cdot \frac{\ln(x) + 2}{4\sqrt{x}}.$$

Pour identifier les valeurs de x pour lesquels $f'(x) > 0$, on remarque d'abord que $f(x) > 0$ et $\frac{1}{4\sqrt{x}} > 0$ pour tout x. Donc

$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x) + 2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < \exp(-2)$$

et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \exp(-2)$. Il vient que f est strictement croissante sur l'intervalle $[0, \frac{1}{e^2}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{1}{e^2}, +\infty[$, avec un maximum en $x = \frac{1}{e^2}$. (On peut en plus remarquer que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.)

(b) $g(x) = (\sqrt{x})^{x^2}$ **Solution** Cette question est semblable à la question (a). On trouve que le domaine de définition de g est $\mathbb{R}_+$, et que $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 1$ (en utilisant le résultat du cours que $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{2} \ln(x) = 0$). Le calcul de la dérivée donne $g'(x) = g(x) \cdot x \cdot (\ln(x) + \frac{1}{2}$, si bien que g est décroissante sur $]0, \frac{1}{\sqrt{e}}]$ et croissante sur $[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty[$, avec un minimum en $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

Exercice 33(a) Calculer $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$. **Solution** En général, on a $(a^b)^c = a^{(b\cdot c)}$, et donc

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2})} = \sqrt{2}^2 = 2.$$

(b) En déduire qu'il existe des nombres *irrationnels* positifs a et b tels que a^b est *rationnel.*

Solution C'est un argument rigolo ! Je ne sais pas si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel ou irrationnel, donc je vais considérer les deux possibilités.

Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, alors on a un exemple avec $a = \sqrt{2}$ et $b = \sqrt{2}$.

Si, en revanche, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel, alors on a un exemple avec $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$, parce que $a^b = 2$ est rationnel.

Exercice 34 (Examen terminal 2004) On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{x+1}\right).$$

(a) Déterminer le domaine de définition de f. Étudier la continuité et la dérivabilité de f. **Solution** Un nombre x appartient au domaine de définition si et seulement si

$$x \geqslant 0 \quad \text{et} \quad -1 \leqslant \frac{2\sqrt{x}}{x+1} \leqslant 1.$$

Or, pour $x \geqslant 0$, on a toujours $\frac{2\sqrt{x}}{x+1} \geqslant 0$. En plus, pour $x \geqslant 0$ on a une chaîne d'équivalences

$$\frac{2\sqrt{x}}{x+1} \leqslant 1 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} + 1 \geqslant) \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 \geqslant 0$$

et cette condition est vérifiée pour tout x avec $x \geqslant 0$. On conclut que la fonction f est définie pour $x \in [0, +\infty[$.

Pour la continuité : Comme la fonction $\frac{2\sqrt{x}}{x+1}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et arcsin est continue sur son domaine de définition, on a que f est continue partout où elle est définie.

Pour la dérivabilité : car arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$, et $\frac{2\sqrt{x}}{x+1}$ est dérivable pour $x \geqslant 0$, on obtient que f est dérivable sur tout son domaine de définition, *sauf* dans les points x tels que $\frac{2\sqrt{x}}{x+1} = \pm 1$. C.à.d., f est dérivable sur

$$\mathbb{R}_+ \setminus \{x \mid \frac{2\sqrt{x}}{x+1} = 1\} = \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}.$$

(b) Calculer la dérivée de la fonction f sur chaque intervalle où elle est dérivable. **Solution** Un calcule montre que

$$f'(x) = \frac{1-x}{|1-x|} \cdot \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{-1}{(x+1)\sqrt{x}} & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

(c) En déduire, suivant les valeurs de x, une relation simple entre $f(x)$ et la fonction $\arctan(\sqrt{x})$.
Solution Ce qui est suggeré dans la question est qu'il y a un rapport simple entre les dérivées de f et de $g(x) := \arctan(\sqrt{x})$. On calcule $g'(x) = \frac{1}{(x+1)\cdot 2\sqrt{x}}$. On voit effectivement que

- pour $0 < x < 1$, on a $f'(x) = 2 \cdot g'(x)$, et donc $f(x) = 2\arctan(\sqrt{x}) + c_1$
- pour $x > 1$, on a $f'(x) = -2 \cdot g'(x)$, et donc $f(x) = -2\arctan(\sqrt{x}) + c_2$.

On a $f(1) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ et $\arctan(\sqrt{1}) = \frac{\pi}{2}$. Donc $c_1 = 0$ et $c_2 = \pi -$ autrement dit,

$$f(x) = \begin{cases} 2\arctan(\sqrt{x}) & \text{si } 0 < x < 1 \\ \pi - 2\arctan(\sqrt{x}) & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$