**Université de Rennes 1**
**Institut Mathématique**
**Cours A01 (Bert Wiest), 2005–2006**

**Exercice 28 (a)** Montrer que $\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ tend vers 0 quand $x$ tend vers $+\infty$.

**(b)** La convergence vers 0 en (a) est très lente ! Calculer (de préférence, sans calculatrice), un $x_0$ tel que $\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} < \frac{1}{4}$ pour $x > x_0$.

**Exercice 31** Considérons la fonction

$$f\colon\ [0, +\infty[ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} x^{x+\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{array} \right. .$$

**(a)** Montrer que $f$ est continue en 0.

**(b)** Calculer la dérivée de $f$, et démontrer que la fonction $f$ est strictement croissante.

**Exercice 32** Pour les deux fonctions suivantes, trouver le domaine de définition, calculer la dérivée, étudier le sens de variation, et calculer la limite en 0.

$$\textbf{(a)} \quad f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}} \qquad \textbf{(b)} \quad g(x) = \left(\sqrt{x}\right)^{x^2}$$

**Exercice 33(a)** Calculer $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$.

**(b)** En déduire qu'il existe des nombres *irrationnels* positifs $a$ et $b$ tels que $a^b$ est *rationnel*.

**Exercice 33** (Examen terminal 2004) On considère la fonction $f$ définie par

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{x+1}\right).$$

**(a)** Déterminer le domaine de définition de $f$. Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$.

**(b)** Calculer la dérivée de la fonction $f$ sur chaque intervalle où elle est dérivable.

**(c)** En déduire, suivant les valeurs de $x$, une relation simple entre $f(x)$ et la fonction $\arctan(\sqrt{x})$.

**Solutions des exercices 27 – 30**

**Exercice 27** $f_1(x) = x^2 \ln(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (car la fonction ln est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et nulle part ailleurs). On a $f_1'(x) = x(1+2\ln(x))$.

$f_2(x) = \ln(\cos(x))$ est définie et dérivable sur $\cup_{k\in\mathbb{Z}}]2\pi k - \frac{\pi}{2}, 2\pi k + \frac{\pi}{2}[$ et $f_2'(x) = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$

$f_3(x) = x\, e^{\sin(x)}$ est définie et dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $f_3'(x) = \exp(\sin(x))(1+x\cdot\cos(x))$

$f_4(x) = (1+x^2)^{\cos(x)} = \exp(\ln(1+x^2)\cdot\cos(x))$ est définie et dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$ (parce que $1+x^2$ est positif pour tout $x \in \mathbb{R}$). On calcule

$$f_4'(x) = (1+x^2)^{\cos(x)} \cdot \left(\frac{2x}{1+x^2}\cdot\cos(x) - \ln(1+x^2)\cdot\sin(x)\right).$$

**Exercice 29** Montrer les inégalités suivantes:

**(a)** Si $x \in \mathbb{R}_+$, alors $\ln(1+x) \geqslant x - \frac{x^2}{2}$.
**Solution** On note $f(x) = \ln(1+x)$, $g(x) = x - \frac{x^2}{2}$, et on veut démontrer que pour tout $x\geqslant 0$ on a $f(x)\geqslant g(x)$. Pour $x = 0$ on a effectivement $f(0) = 0 = g(0)$. Ensuite on calcule $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $g'(x) = 1-x$, et on a une chaîne d'équivalences

$$f'(x)\geqslant g'(x) \;\Leftrightarrow\; \frac{g'(x)}{f'(x)}\leqslant 1 \;\Leftrightarrow (1-x)(1+x)\leqslant 1 \;\Leftrightarrow\; 1-x^2\leqslant 1,$$

et la dernière inégalité est vraie pour tout nombre réel $x$. On en déduit que $f(x)\geqslant g(x)$ pour tout $x\geqslant 0$. (On peut aussi remarquer que $f(x)\leqslant g(x)$ pour tout $x \in ]-1,1]$.)

**(b)** Si $x \in \mathbb{R}_+$, alors $0 \leqslant e^x - 1 \leqslant xe^x$.
**Solution** Soit $f(x) = \exp(x) - 1$, $g(x) = x\cdot\exp(x)$. On veut démontrer $0 \overset{(1)}{\leqslant} f(x) \overset{(2)}{\leqslant} g(x)$.
Pour (1) : On a $f(0) = 0$, et pour tout nombre réel $x$ on a $f'(x) = \exp(x)\geqslant 0$. On en déduit que $f(x)\geqslant 0$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ (et $f(x)\leqslant 0$ pour $x \in \mathbb{R}_-$).
Pour (2) : On a $g(0) = 0 = f(0)$, et la dérivée de $g$ est $g'(x) = (1+x)e^x$. Pour $x\geqslant 0$ on a donc $g'(x) = (1+x)e^x\geqslant e^x = f'(x)$, et on peut conclure que l'inégalité (2) est vraie.

**(c)** Si $x \in \mathbb{R}_+$, alors $0 \leqslant e^x - 1 - x \leqslant \frac{x^2}{2}e^x$. **Solution** semblable. Pour la démonstration de la première inégalité, on peut utiliser (b).

**Exercice 30** On considère la fonction

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2\cdot\sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Démontrer que $f$ est dérivable partout (notamment en $x = 0$), mais que la fonction $f'$ n'est pas continue.

**Solution** Sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, la fonction $f$ est dérivable, car les fonctions $x^2$, $\sin(x)$ et $\frac{1}{x}$ sont dérivables. Par un calcul, on trouve $f'(x) = 2x \cdot \sin(\frac{1}{x}) - x^2 \cdot \cos(\frac{1}{x}) \cdot \frac{1}{x^2} = 2x \cdot \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$. Étudions donc la dérivabilité de $f$ en 0. On a $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x \cdot \sin(\frac{1}{x}) \overset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ (où la convergence découle du fait que $|x \cdot \sin(\frac{1}{x})| \leqslant |x|$ et du théorème des gendarmes). On obtient donc que $f$ est aussi dérivable en 0, et que $f'(0) = 0$.

Pour démontrer que $f$ n'est pas continue, nous regardons par exemple la suite $x_k = \frac{1}{2\pi k}$ (pour $k \in \mathbb{N}$). La suite $x_k$ tend vers 0 quand $k$ tend vers $+\infty$. Si $f$ était continue en 0, on aurait que $f'(x_k) \overset{k \to \infty}{\longrightarrow} f'(0) = 0$. Or, on a $f'(x_k) = -1$ pour tout $k$, et donc $\lim_{k \to \infty} f'(x_k) = -1$.