Université de Rennes 1
Institut Mathématique
Cours A01 (Bert Wiest), 2005–2006

Exercice 27 Calculer les dérivées des fonctions suivantes (en spécifiant pour chaque fonction son domaine de définition et son domaine de dérivabilité) :

$$f_1(x) = x^2 \ln(x), \qquad f_2(x) = \ln(\cos(x)),$$
$$f_3(x) = x\ e^{\sin(x)}, \qquad f_4(x) = (1+x^2)^{\cos(x)}$$

Exercice 28 (a) Montrer que $\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

(b) La convergence vers 0 en (a) est très lente ! Calculer (de préférence, sans calculatrice), un x_0 tel que $\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} < \frac{1}{4}$ pour $x > x_0$.

Exercice 29 Montrer les inégalités suivantes:

(a) Si $x \in \mathbb{R}_+$, alors $\ln(1+x) \geqslant x - \frac{x^2}{2}$. (Indication : montrer que l'inégalité est vraie pour $x = 0$, et comparer les dérivées de $\ln(1+x)$ et $x - \frac{x^2}{2}$.)

(b) Si $x \in \mathbb{R}_+$, alors $0 \leqslant e^x - 1 \leqslant xe^x$.

(c) Si $x \in \mathbb{R}_+$, alors $0 \leqslant e^x - 1 - x \leqslant \frac{x^2}{2}e^x$.

Solutions des exercices 22 - 26

Exercice 22 Calculer les dérivées des fonctions suivantes (en spécifiant pour chaque fonction son domaine de définition) :
$f_1(x) = \frac{x+3}{x-2}$ définie et dérivable pour $x \neq 2$, $f_1'(x) = \frac{-5}{(x-2)^2}$.
Pour $f_2(x) = \frac{x}{(x^2+2)^2}$, qui est définie et dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_2'(x) = \frac{-3x^4-4x^2+4}{(x+2)^4}$.
Pour $f_3(x) = \sqrt{2x^2-4x+1}$, qui est défini pour $x \in \mathbb{R}\backslash]1-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1+\frac{1}{\sqrt{2}}[$, est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus [1-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1+\frac{1}{\sqrt{2}}]$, et $f_3'(x) = \frac{2(x-1)}{\sqrt{2x^2-4x+1}}$.
Pour $f_4(x) = (2-x^2)^7\sqrt{2+x^2}$, qui est défini pour tout nombre réel x, $f_4'(x) = \frac{-x(2-x^2)^6(26+15x^2)}{\sqrt{2+x^2}}$.
Pour $f_5(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, qui est défini pour $x \in [-1, 1[$, $f_5'(x) = ((1+x)(1-x)^3)^{-\frac{1}{2}}$.
Pour $f_6(x) = (x^3-3x^2+6x)e^x$, qui est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_6'(x) = (x^3+6)e^x$.

Exercice 23 On considère la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^3}{1+x^2}$. Calculer f' et f'' et déterminer pour quelles valeurs x on a $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$, $f''(x) < 0$. Calculer $\lim_{x\to\infty} f(x) - x$. Dessiner le graphe de f.

Solution On trouve

$$f'(x) = \frac{x^4+3x^2}{(1+x^2)^2} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{x(1+x^2)(-2x^2+6)}{(1+x^2)^4}.$$

Donc $f'(0) = 0$ et $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. De plus, il vient $f''(x) > 0$ si $x \in]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]0, \sqrt{3}[$. On trouve aussi que

$$f(x) - x = \frac{x^3 - x - x^3}{1+x^2} = \frac{-x}{1+x^2},$$

ce qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 24 (a) La fonction $f\colon x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ est-elle dérivable en 0 ? **Solution** Oui ! En effet, on a $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{1+|x|}$ et la limite $\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+|x|}$ existe et vaut 1.

(b) La fonction $f\colon x \mapsto xE(x)$ est-elle dérivable en 0 ? **Solution** Non ! En effet, on va montrer que $f'_d(0)$ et $f'_g(0)$ existent, mais ils ne sont pas égales. Pour le calcul de $f'_d(0)$ on observe que dans l'intervalle $[0,1]$ on a $f(x) = 0$ (donc $f'_d(0) = 0$), et dans l'intervalle $[-1,0]$ on a $f(x) = -x$ (donc $f'_g(0) = -1$).

(c) La fonction $x \mapsto x^2E(x)$ est-elle dérivable en 0 ?
Solution Oui ! En effet, $\lim_{x\to 0} \frac{x^2E(x)}{x} = \lim_{x\to 0} xE(x) = 0$.

Exercice 25 (a) Montrer que l'on a $x\cos x - \sin x < 0$ si $x \in]0, \pi[$. **Solution** Si $f(x) = x\cos x - \sin x$, alors $f'(x) = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x < 0$ si $0 < x < \pi$. Comme $f(0) = 0$ on obtient $f(x) < 0$ pour $x \in]0, \pi[$.

(b) Étudier le sens de variation de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ sur l'intervalle $]0, \pi[$. Soient a et b des nombres réels tels que $0 < a < b < \pi$. Montrer que l'on a $\frac{a}{b} < \frac{\sin a}{\sin b}$.
Solution La fonction $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ est décroissante sur l'intervalle $]0, \pi[$. En effet, $f'(x) = \frac{\cos(x)\cdot x - \sin(x)}{x^2}$, ce qui est négatif d'après (a). En particulier, si $0 < a < b < \pi$, alors $\frac{\sin a}{a} > \frac{\sin b}{b}$.

Exercice 26 Le but de cet exercice est de généraliser l'inégalité bien-connue $2ab \leqslant a^2 + b^2$.

(a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $f\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{(1+x)^p}{1+x^p}$ a pour maximum 2^{p-1}. **Solution** On calcule

$$f'(x) = \frac{p(1+x)^{p-1}}{(1+x^p)^2}(1 - x^{p-1}).$$

On observe que le premier facteur est toujour strictement positif. Donc on a $f'(x) > 0$ pour $x < 1$, $f'(0) = 0$, et $f'(x) < 0$ pour $x > 1$. Comme, en plus, la fonction f est définie sur l'*intervalle* $\mathbb{R}_+$, on obtient que le seul extemum local est $x = 1$, qui est un maximum, et un calcul montre que $f(1) = 2^{p-1}$.

(b) Soient a et b des nombres réels positifs. Montrer que l'on a

$$(a+b)^p \leqslant 2^{p-1}(a^p+b^p).$$

Solution On a $2^{p-1} \geqslant f(\frac{b}{a}) = \frac{(a+b)^p}{a^p+b^p}$, où la première inégalité vient de (a).