Université de Rennes 1
Institut Mathématique
Cours A01 (Bert Wiest), 2005–2006

Exercice 22 Calculer les dérivées des fonctions suivantes (en spécifiant pour chaque fonction son domaine de définition) :

$$f_1(x) = \frac{x+3}{x-2}, \quad f_2(x) = \frac{x}{(x^2+2)^2}, \quad f_3(x) = \sqrt{2x^2 - 4x + 1}$$

$$f_4(x) = (2-x^2)^7\sqrt{2+x^2}, \quad f_5(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad f_6(x) = (x^3 - 3x^2 + 6x)e^x$$

Exercice 23 On considère la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^3}{1+x^2}$. Calculer f' et f'' et déterminer pour quelles valeurs x on a $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$, $f''(x) < 0$. Calculer $\lim_{x\to\infty} f(x) - x$. Dessiner le graphe de f.

Exercice 24 (a) La fonction $f\colon x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ est-elle dérivable en 0 ?

(b) La fonction $f\colon x \mapsto xE(x)$ est-elle dérivable en 0 ?

(c) La fonction $x \mapsto x^2E(x)$ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 25 (a) Montrer que l'on a $x\cos x - \sin x < 0$ si $x \in]0, \pi[$.

(b) Étudier le sens de variation de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ sur l'intervalle $]0, \pi[$. Soient a et b des nombres réels tels que $0 < a < b < \pi$. Montrer que l'on a $\frac{a}{b} < \frac{\sin a}{\sin b}$.

Exercice 24 Le but de cet exercice est de généraliser l'inégalité bien-connue $2ab \leqslant a^2 + b^2$.

(a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $f\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{(1+x)^p}{1+x^p}$ a pour maximum 2^{p-1}.

(b) Soient a et b des nombres réels positifs. Montrer que l'on a

$$(a+b)^p \leqslant 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Solutions des exercices 20 & 21

Exercice 20 Les fonctions suivantes, est-ce qu'elles sont injectives ? Surjectives ?

$$f(x) = \frac{4}{3\pi}x + \frac{1}{2}\sin(x), \qquad g(x) = \frac{4}{3\pi}x + \frac{1}{3}\sin(x).$$

Solution : Les deux sont surjectives. En effet, soit $y \in \mathbb{R}$, et supposons que $y > 0$ (le cas $y \leqslant 0$ est semblable). On va démontrer que l'équation $f(x) = y$ a une solution. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ assez grand pour que $y < \frac{4}{3\pi}x_0 - \frac{1}{2}$ (ce qui est équivalent à $x_0 > \frac{3\pi}{4} \cdot (y + \frac{1}{2})$). Alors on a $y < f(x_0)$ (et aussi $y < g(x_0)$). En revanche, on a $f(0) = 0$; on a donc $f(0) < y < f(x_0)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires on peut déduire qu'il existe un $x \in [0, x_0]$ tel que $f(x) = y$. L'argument pour la fonction g est semblable.

La fonction f n'est pas injective. Effectivement, $f(0) = 0$, $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$ et $f(\pi) = \frac{4}{3}$. L'observation essentielle est maintenant que $f(\pi)$ est "entre" $f(0)$ et $f(\frac{\pi}{2})$: $f(0) < f(\pi) < f(\frac{\pi}{2})$. Comme la fonction f est continue sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, il existe un x appartenant à cet intervalle tel que $f(x) = f(\pi)$ (par le théorème des valeurs intermédiaires). Donc f n'est pas injective.

En revanche, la fonction g est injective. En effet, g est définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$. En plus, sa dérivée est $g'(x) = \frac{4}{3\pi} + \frac{1}{3}\cos(x)$. Comme $\frac{1}{3}\cos(x) > -\frac{1}{3} > -\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{\pi}$ pour tout x, on a $g'(x) > 0$ pour tout x. La fonction g est donc strictement croissante, et en particulier injective.

Exercice 21 On rappelle qu'on dit une fonction $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *paire* si, pour tout x on a $f(x) = f(-x)$, et qu'on dit qu'elle est *impaire* si pour tout réel x on a $f(-x) = -f(x)$. Montrer que si une fonction f est paire et dérivable sur $\mathbb{R}$, alors sa dérivée f' est une fonction impaire, et vice versa.

Solution : On va regarder le cas où f est paire. L'astuce est d'effectuer un changement de variables, en posant $\widetilde{x} := -x$. Voici le calcul:

$$\begin{aligned}
f'(-x_0) &= \lim_{x \to -x_0} \frac{f(x) - f(-x_0)}{x - (-x_0)} \\
&= \lim_{\widetilde{x} \to x_0} \frac{f(-\widetilde{x}) - f(-x_0)}{-\widetilde{x} - (-x_0)} \\
&= \lim_{\widetilde{x} \to x_0} -\frac{f(-\widetilde{x}) - f(-x_0)}{\widetilde{x} - x_0} \\
&= \lim_{\widetilde{x} \to x_0} -\frac{f(\widetilde{x}) - f(x_0)}{\widetilde{x} - x_0} \\
&= -f'(x_0).
\end{aligned}$$